Mathématiques Financières

Professeur: Mr. H.GOUMRHAR

Année universitaire 2019/2020

Plan du cours

- Introduction
- Intérêt simple
- Escompte
- Intérêt composé
- Les annuités
- Amortissements des emprunts indivis

Introduction:

On regroupe sous l'appellation de mathématiques financières l'ensemble des techniques mathématiques permettant de traiter des phénomènes régissant les marchés financiers, tel que les calculs relatifs aux taux d'intérêt, les annuités, les emprunts…

Quelques notions de base:

- **Marchés financiers** : sont les marchés sur lesquels se rencontrent les demandes et les offres de capitaux. Comme tout marché, est un lieu d'échange entre acheteurs et vendeurs. Cet échange concerne des produits (métaux précieux, produits de base agricoles) ou instruments financiers (titres financiers : actions et obligations..).

  …C'est un marché sur lequel des personnes, des sociétés privées et des institutions publiques (état) peuvent négocier des titres financiers, des matières premières à des prix déterminé par l'offre et la demande sur le marché.

- **Les titres financiers:** comprennent les actions et obligations. Une action est un titre de propriété qui confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital d'une entreprise. Tandis que les obligations sont des titres de créances, émises par l'Etat et les sociétés pour emprunter des fonds sur les marchés.

- **Un actif financier:** c'est un titre ou un contrat généralement négociable, qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque.

I . Les intérêts: définition

L'intérêt peut être défini comme loyer de l'argent. Il peut être **une dépense ou revenu**.

Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur (débiteur, le tiré). L'intérêt correspond à la rémunération du capital prêté ;

Il s'agit d'un revenu pour le prêteur (créditeur, tireur, créancier). C'est le prix à payer au prêteur, pour le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent appelé **capital** pendant une période de temps.(entre deux dates différentes).

Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- la somme prêtée noté **Co.**
- la durée du prêt notée **n.**
- le taux auquel cette somme est prêtée noté **t ou i.**

Il y a deux types d'intérêt: **l'intérêt simple et l'intérêt composé.**

1. Intérêt simple

1.1. Principe et champs d'application

- L'intérêt simple se calcule toujours sur le même capital principal.
- L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté.
- L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieure à un an).

Formule:

Considérons un capital **Co** placé au taux **t** pendant une période déterminée **n**. Le montant des intérêts I au bout de cette période est donné par :

$$I = (Co \times t \times n)/100$$

Remarques :

- Généralement l'intérêt simple porte sur des durées très courtes.(≤ 1 année).
- Dans le calcul des intérêts simples, le capital ne varie pas au cours du temps.
- Pour tous les calculs concernant l'intérêt simple, les durées de placement qui dépassent un an ne le sont que pour servir un calcul théorique.

Exemple:

Calculons l'intérêt produit par un capital de 35.850 dirhams placé pendant 3 ans à un taux égal à 11%.

I = (C * n * t) / 100 = (35850 * 3 * 11) / 100 = 11 830,5 MAD (dirhams)

Si la durée est en jours : I=(C * j * t)/36000. (36000 = 100 * 360 jours)

Si la durée est en mois: I = (C * m * t) / 1200. (1200 = 100 * 12 mois)

Souvent l'intérêt simple est calculé en fonction du nombre du jour de placement. L'année est prise pour 360 jours et les mois sont comptés pour leur nombre de jours exact.

Exemple:

1- Quel est l'intérêt produit à intérêt simple par un placement d'une somme d'argent de 12.500 dirhams au taux de 10,5% pendant 96 jours.

2- Quel est l'intérêt produit par un placement de 15.500 dirhams au taux de 9,5% pendant 7 mois.

3- Soit un capital de 30.000 dirhams placé à intérêt simple du 17 mars au 27 juillet de la même année à un taux de 12,5%. Calculer l'intérêt produit par ce placement.

Solution:

1. I = (12500 * 96 * 10,5) / 36 000 = **350 dirhams**
2. I = (15 500 * 9,5 * 7) / 1200 = **858,96 dirhams**
3. Si la durée s'exprime d'une date à une autre, alors on calcule le nombre de jours qu'on a réellement (**on compte le dernier jour et on néglige le premier**).
   I = (30 000 * 12,5 * 132) / 36 000 = **1375 dirhams**

1.2. valeur acquise : (ou valeur définitive d'un placement)

La valeur acquise du capital après « n » périodes de placement est la somme du capital initial plus les intérêts gagnés. Si on note (Va) la valeur acquise alors:

$$Va = C + I$$

Va= C + ((C*n*t)/100) si la durée est exprimée en année

Va = C (1 + ((n*t)/100))

Ou encore, **Va = C(1 + (n*t/100))**

Exemple:

Calculer l'intérêt et la valeur acquise d'un placement à intérêt simple de 15.000 dirhams pendant 50 jours à un taux de 9%.

Réponse :

I = (C*j*t)/36000 = (15000 * 50 * 9) / 36000 = 187,5 dirhams

Va = C + I = 15000 + 187,5 = 15 187,5 dirhams

Ou encore Va = C(1+ ((n*t)/36000))

Va = 15000 (1 + ((50*9)/36000))

Va = 15 187,5 dirhams

1.3. Taux moyen de plusieurs placements:

Le taux moyen des placements est un taux unique noté «**tm**», appliqué à l'ensemble de ces placements pour donner le même intérêt global (IG).

Avec $I_G = I_1+I_2+I_3+\ldots$

Exemple:

- Soient trois capitaux C1, C2, C3 placés à des taux respectifs t1, t2, t3 pendant les durées j1, j2, j3. déterminer l'intérêt global procuré par les trois placements :

On sait que: $I_G = \sum I_k$ **avec (k=1….3)**

$I_G = I1+I2+I3$

IG=[(C1*J1*t1)/36000]+[(C2*J2*t2)/36000]+[(C3*J3*t3)/36000]

IG = [(C1*J1*t1) + (C2*J2*t2) + (C3*J3*t3)]/36000

Ainsi: **IG=[(C1*J1*tm)/36000]+[(C2*J2*tm)/36000]+[(C3*J3*tm)/36000]**

IG = [(C1*J1*tm) + (C2*J2*tm) + (C3*J3*tm)]/36000

Donc:

[(C1*J1*tm)+(C2*J2*tm)+(C3*J3*tm)]/36000=[(C1*J1*t1)+(C2*J2*t2)+(C3*J3*t3)]/36000

Alors:

$$tm = \sum(C_k*J_k*t_k) / \sum (C_k*J_k) \quad \textbf{avec (k=1…3)}$$

- **Exemple:**

1. Calculer le taux moyen des trois placements suivants :
   - 2.000 dirhams placés pendant 30 jours à 7%.
   - 7.000 dirhams placés pendant 60 jours à 10%.
   - 10.000 dirhams placés pendant 50 jours à 9%.

2. Calculer l'intérêt global en fonction du taux moyen.

Solution:

Tm = [(2000*30*7)+(7000*60*10)+(10000*50*9)]/(2000*30)+(7000*60)+(10000*50)

Tm = 9,3%

IG = [(2000*30*7)+(7000*60*10)+(10000*50*9)]/36000
= [(2000*30*9,3)+(7000*60*9,3)+(10000*50*9,3)]/36000
= 912000/36000 = 253 dirhams

2. Escompte

- L'escompte est une opération au cours de laquelle une entreprise va céder ses effets de commerce (une traite par exemple) à la banque, qui en échange va lui avancer le montant de cet effet de commerce. la particularité propre à l'escompte (les intérêts sont déduits du capital initial).
- L'escompte permet de faire face à des décalages de trésorerie.

Quelques définitions:

- **Effet de commerce:** il s'agit d'un titre négociable qui vaut moyen de paiement.
- **Traite bancaire:** est un effet qui permet à un créancier dénommé le « **tireur** », d'inviter son débiteur appelé le « **tiré** » à payer une somme d'argent déterminée auprès d'une troisième personne, la banque (en cas d'escompte), appelée « **bénéficiaire** » dans une durée de temps déterminée appelée «**échéance** ».
- **Décalage de trésorerie:** c'est le besoin de trésorerie ou l'absence d'un fond de roulement suffisant. il peut engendrer des situations problématiques pour les entreprises et la gestion de leur exploitation.

2.1. Calcul d'escompte :

- Soit « Vn » **la valeur nominale de l'effet, valeur inscrite sur l'effet et payable à échéance.** Soit « n » la durée qui sépare la date de négociation et l'échéance de l'effet. Soit « t » le taux d'escompte.

L'escompte commercial s'écrit comme suit :

e= (Vn*n*t)/36000

La valeur actuelle de l'effet « a » s'écrit comme suit :

V actuelle (a) = V nominale – e.

- **Exemple :**

Combien le banquier remettra-t-il à son client s'il lui escompte en 29-11-2005 un effet de 100.000 dirhams payables au 20-02-2006, en sachant que le taux égal à 9%.

Solution :

- On sait que : e= (V x N x t)/36000

avec V= 100 000
N= 83
T= 9

Donc **e= (100000 * 9 * 83)/36000 = 2075 MAD**

La valeur actuelle est **alors a = V – e = 100 000 – 2075 = 97 925 MAD**

97 925 MAD est la somme que le banquier va remettre à son client.

2.2. Pratique d'escompte:

- En pratique, la remise d'un effet à l'escompte engendre, en plus de l'escompte, d'autres frais financiers supplémentaire tels que:
  - Diverses commissions fixes (commission d'acceptation et de courrier).
  - La taxe sur la valeur ajoutée (au Maroc de 7%)
  - Durée de l'escompte majorée d'un ou de plusieurs jours (nommé « jours de banque »). Souvent un ou deux jours.

L'ensemble de ces frais supplémentaires, en plus de l'escompte proprement dit, représente « **l'agio** » .

L'agio HT = escompte + commissions fixes + jours de banque

L'agio TTC = l'agio HT+ (l'agio HT*TVA)

Valeur nette = Valeur nominale – l'agio TTC

La valeur nette c'est la somme effectivement mise à la disposition du vendeur de l'effet de commerce avant son échéance.

Exemple:

- Soit un effet de commerce de 35.500 dirhams échéant le 27 juillet 2005 et escompté le 10 avril de la même année, aux conditions suivantes :
- Taux d'escompte : 13%
- Commission de manipulation : 2 dirhams par effet ;
- TVA : 7% ;
- Tenir compte d'un jour de banque.

Calculer la valeur actuelle de l'effet.

Solution:
V = 35 500
N = 108 + 1 jour de banque = 109 jours.
T = 13%
On sait que e = (V*N*T)/36000
Alors e = (35500*109*13)/36000 = 1397,32 MAD
L'agio HT = e + commission = 1397,32 + 2 dh = 1399,32 MAD
L'agio TTC = l'agio HT + (l'agio HT*TVA) = 1399,32 + 97,96 = 1497,28 MAD
V nette = V nominale – agio TTC = 35500 – 1497,28 = 34 002,72 MAD

Le banquier remettra au créancier une somme de 34 002,72 MAD pour son effet de commerce.

2.3. Taux d'escompte : taux effectif et taux de revient

- Le taux d'escompte est un taux d'intérêt utilisé sur le marché monétaire, pour les prêts à court terme (quelques jours). Il tient compte de la particularité propre à l'escompte (les intérêts sont déduits du capital initial).
- Les taux relatifs à l'opération de l'escompte sont : **le taux effectif d'escompte et taux de revient de l'escompte**. Ces taux tiennent compte, en plus du taux nominal d'escompte, des éventuelles commissions perçues par l'établissement financier (**l'agio**).

Les diverses commissions et taxes ont pour effet d'aggraver le taux nominal d'escompte supporté par l'entreprise auprès de sa banque.

- **Taux effectif d'escompte :**
  Le taux effectif de l'opération d'escompte commercial se calcule sur **la base de la valeur nominale** et en fonction d'une année de 360 jours et en tenant compte de la durée réelle du crédit.

  Te = (agio * 36000) / (V. nominale*N)

- **Taux de revient d'escompte :**
  Le taux de revient d'opération d'escompte commercial, c'est le taux réellement appliqué. Il se calcule sur **la base de la valeur nette** et en fonction d'une année de 360 jours et en tenant compte de la durée réelle du crédit.

  (V nette = V. nominale – agio)
  Tr = (agio*36000) / (V nette * N)

Exemple:

Calculons le taux d'effectif d'escompte et le taux de revient d'escompte en se basant sur les éléments de l'exemple précédent:

Taux d'effectif d'escompte:

On sait que **Te = (agio*36000)/(V nominale*N)**

Avec agio TTC = L'agio TTC = l'agio HT + (l'agio HT*TVA)

= 1399,32 + 97,96 = 1497,28 MAD

Alors Te = (1497,28*36000) / (35000*108) = **14,06%**

Taux de revient d'escompte:

On a **Tr = (agio*36000) / (V nette *N)**

Avec V. nette = V. nominale – agio

Donc Tr = (1497.28*36000) / (34002,72*108) = **14,68%**

2.4. Équivalence de deux effets :

Deux effets sont équivalents à une date appelée date d'équivalence, si, escomptés au même taux, ils ont la même valeur actuelle à cette date. La date d'équivalence est unique.

Avec Va = V. nominale - escompte

et l'escompte = (V. nominale*N*t) / 36 000

E_1 et E_2 sont équivalents si :

$V_1 - (V_1*N_1*t) / 36000 = V_2 - (V_2*N_2*t) / 36\ 000$

Avec V_1 et V_2 = valeurs nominales des deux effets E_1 et E_2

N_1 et N_2 = Durée d'escompte en jours

t = taux d'escompte

Exemple:

- En 3 décembre 1993, Mr. Jacque compare les deux effets suivants :

◦ l'effet E1 a une valeur nominale de 1 477,78 € et il arrive à échéance le 2 janvier 1994,

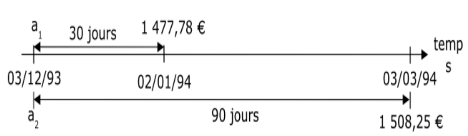
◦ l'effet E2 a une valeur nominale de 1 508,25 € et il arrive à échéance le 3 mars 1994.

Le taux d'escompte est de 12 %.

1. Schématiser la situation par rapport à un axe de temps.
2. Les deux effets sont ils équivalents au 3 décembre 1993 ?

Solution:

1.



2. Déterminer les valeurs actuelles a1 et a2 des deux effets au 3 décembre 1993.

Pour que le commerçant ne soit pas lésé, s'il veut remplacer un effet par un autre, il faut que, le 3 décembre 1993, les deux effets aient la même valeur actuelle.

*A1 = V1- ((V1*N1*t) / 36 000) = 1477.78 – (1477.78*30*12) / 36000 =* ***1463 euros***

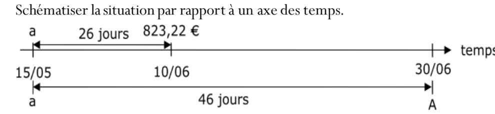
*A2 = V2- ((V2*N2*t) / 36 000) = 1508.25 – (1508.25*90*12) / 36000 =* ***1463 euros***

- ***N.B :*** *on divise sur 360 si on a déjà converti le taux d'escompte en nombre décimal.*

exemple 2 :

Un commerçant remplace, à la demande de son client, un effet de valeur nominale 823,22€ échéant le 10 juin, par un autre échéant le 30 juin. Le remplacement est effectué le 15 mai et le taux d'escompte est de 15 %.

1. Schématiser la situation par rapport à un axe des temps.



2. **A quelle condition le commerçant ne sera-t-il pas lésé ?**

Pour que le commerçant ne soit pas lésé, il faut que le 15 mai les deux effets aient la même valeur actuelle.

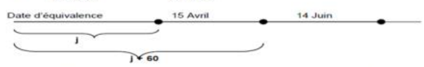
3. **Quelle doit être la valeur nominale de l'effet de remplacement ?**

Valeur actuelle du premier effet : Va1=823,22−[(823,22×0,15×26)/360]=**814,30 €**. Les deux effets sont équivalents si le deuxième effet a la même valeur actuelle. On doit alors résoudre l'équation : Vn2−[(Vn2×0,15×46)/360]=814,30€. **Cette équation est appelée « équation d'équivalence ». Vn2= 830,15 euros.**

Exemple 3 :

À quelle date un effet de valeur nominale de 20.000 dirhams à échéance du 15 avril est-il équivalent à un effet de 20.435,68 dirhams à échéance du 14 juin de la même année. Taux d'escompte est de 12,6%.

On sait que : $V_1 - \frac{V_1 \times j_1 \times t}{36.000} = V_2 - \frac{V_2 \times j_2 \times t}{36.000}$.



Donc, $20.000 - \frac{20.000 \times j \times 12.6}{36.000} = 20.435,86 - \frac{20.435,86 \times (j+60) \times 12.6}{36.000}$

On trouve, j = 43,985 = 44 jours.

Exemple 4 :

On désir remplacer un effet d'une valeur nominale de 75.000 dirhams payable dans 60 jours par un autre effet de valeur nominale de 74.600 dirhams. Quelle sera l'échéance de cet effet ? Sachant que le taux d'escompte est de 13%.

Solution:

- On a pour E_1 : $V_1 = 75000$ avec $J_1 = 60$j
- Et E_2 : $V_2 = 74\,600$ avec $J_2 = ?$

On sait que $V_1 - \frac{V_1 \times j_1 \times t}{36.000} = V_2 - \frac{V_2 \times j_2 \times t}{36.000}$.

$\Rightarrow 75.000 - \frac{75.000 \times 60 \times 13}{36.000} = 74.600 - \frac{74.600 \times 13 \times j_2}{36.000}$.

Donc, j_2 = 45,47 = 46 jours.

Pour que le commerçant puisse remplacer un effet de 60 jrs par un autre, avec le même taux d'escompte, il faut que l'échéance du nouvel effet soit de 46 jours.

2.4.1 Equivalence de plusieurs effets : échéance commune :

L'échéance commune est le cas de remplacer plusieurs effets par un seul effet. l'échéance commune est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés, avec le même taux d'escompte.

Valeur actuelle de l'effet unique

=

Valeur actuelle de l'ensemble des effets remplacés

($Va_1 + Va_2 + Va_3 \ldots + Va_j$)

Exemple :

On souhaite remplacer le 15 juin les trois effets ci-dessous par un effet unique.

E1 : V1 = 5.000 échéance = 20 août

E2 : V2 = 4.000 échéance = 15 juillet

E3 : V3 = 12.000 échéance = 20 septembre.

Quelle est l'échéance de l'effet de 21.200 dirhams remplaçant les effets E1, E2 et E3 avec un taux d'escompte de 13%.

Réponse :

On sait que **valeur actuelle = valeur nominale – escompte.**

Avec **escompte = (V nominale*j*t)/36000**

Alors: V-((V*J*t)/36000) = (V_1– ((V_1*J_1*t)/36000))+(V_2-((V_2*J_2*t)/36000)) + (V_3 – ((V_3*J_3*t)/36000))

21200-((21200*J*13)/36000)=(5000–((5000*66*13)/36000))+(4000-((4000*30*13)/36000)) + (12000 – ((12000*97*13)/36000)).

J = 102,257 = 103 jours (l'échéance commune est le 26/09)

2.4.2. Echéance moyenne : cas particulier de l'échéance commune

L'échéance moyenne c'est un cas particulier de l'échéance commune. c'est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence, a une valeur nominale égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

V nominale de l'effet unique

=

la somme des Valeurs nominales de l'ensemble des effets.

Exemple :

On souhaite remplacer le 15/03 (**date d'équivalence**) les trois effets ci-dessous par un effet unique.

- **E_1 : V_1 = 3.000 dh échéance = 15/03**
- **E_2 : V_2 = 5.000 dh échéance = 31/03**
- **E_3 : V_3 = 7.000 dh échéance = 30/04**

Quelle est l'échéance moyenne de l'effet unique de 15.000 dirhams remplaçant les effets E1, E2 et E3 avec un taux d'escompte de 13%.

Solution:

$$V-\frac{V\times j\times t}{36.000}=\left[V_1-\frac{V_1\times j_1\times t}{36.000}\right]+\left[V_2-\frac{V_2\times j_2\times t}{36.000}\right]+\left[V_3-\frac{V_3\times j_3\times t}{36.000}\right]$$

On a : $V = V_1 + V_2 + V_3$.

Donc, $$(V_1+V_2+V_3)-\frac{(V_1+V_2+V_3)\times j\times t}{36.000}=\left[V_1-\frac{V_1\times j_1\times t}{36.000}\right]+\left[V_2-\frac{V_2\times j_2\times t}{36.000}\right]+\left[V_3-\frac{V_3\times j_3\times t}{36.000}\right]$$

$\Rightarrow (V_1 + V_2 + V_3) \times J = (V_1 \times j_1) + (V_2 \times j_2) + (V_3 \times j_3)$.

Donc :

$J = ((V_1*J_1) + (V_2*J_2) + (V_3*J_3)) / (V_1+V_2+V_3)$

J = ((3000*0) + (5000*16) + (7000*46)) / 15000

= 402000 / 15000 = **26,8**

L'échéance moyenne de l'effet unique est d'un peu près 27 jours après la date d'équivalence (le 15 mars), la date d'échéance moyenne est le 11/04 avec une valeur nominale de l'effet unique de 15000.

N.B: **L'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte.**

Une méthode alternative de calcul de l'échéance moyenne :

Effets	Valeur nominale	Echéance	Jours*	Nombre (V*J)
E1	3000	15/03	0	0
E2	5000	31/03	16	80 000
E3	7000	30/04	46	322 000
TOTAL	15000	??	??	402 000

Em = somme des nombres / somme des V. nominales

Em= 402 000 / 15 000 = 27jrs (après la date d'équivalence) soit le 11 avril.

***c'est l'écart entre la date d'équivalence et l'échéance de chaque effet.**

3. Les intérêts composés

Définition:

Un capital est placé à intérêt composé lorsque le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement s'ajoute au capital placé pour devenir productif d'intérêts de la période suivante. On parle alors de « **capitalisation des intérêts** ».

3.1. la période de placement est un nombre entier:

La valeur acquise **Cn** par le capital initial **C0** au bout de **n** périodes de placement est égale à :

$$C_n = C_o\ (1+i)^n$$

N.B: en matière d'intérêt composé, on travaille avec « i = t/100 ».

période	Capital initial	Intérêt de la période	Valeur acquise
1	C_0	Co * i	Va = Co+ Co*i = Co(1+i)
2	Co(1+i)	[Co(1+i)]*i	Va= Co(1+i)(1+i) = Co(1+i)²
n	Co(1+i)^n-1	[(Co(1+i)^n-1]*i	Va = Co(1+i)^ n

Remarques :

- Généralement l' intérêt composé porte sur des durées de placement dépassent un an .(> 1 année).
- Dans le calcul des intérêts composés, le capital varie pour chaque période.
- En matière d'intérêt composé, on travaille avec «i =t/100 ».
- La capitalisation des intérêts peut être annuelle, semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

Exemple:

Calculer la valeur acquise d'un capital de 80.000 dirhams placé pendant 6 ans à 9% l'an (capitalisation annuelle).

Solution:

On sait que C_n = Co(1+i)^n

Va = 80 000(1+0,09)^6

Va= 134 168 MAD

- **3.2. La période de placement est un nombre fractionnaire:**

  C'est le cas d'un capital placé au bout de k années et quelques mois. La période de placement ici est un nombre fractionnaire d'années. Dans ce cas, on distingue entre deux solutions:

  - Solution rationnelle
  - Solution commerciale

- Pour la solution rationnelle, la formule s'écrit en général:

$$C_{k+\frac{p}{12}} = C_0(1+i)^k(1+\frac{p}{12}\mathrm{i})$$

- Pour la solution commerciale, la formule générale s'écrit:

$$C_{k+\frac{p}{12}} = C_0(1+i)^{k+\frac{p}{12}}$$

Avec k : le nombre d'années et p: le nombre de mois.

Exemple:

- un capital de 80.000 dirhams placé pendant une période de 5 ans et 6 mois à 9% l'an, capitalisation annuelle. Calculer la valeur acquise en solution rationnelle et commerciale.

Solution:

Solution commerciale:

$$C_{5+\frac{6}{12}} = C_0(1+0{,}09)^{5+\frac{6}{12}} = \text{128 509,64 MAD}$$

Solution rationnelle:

$$C_{k+\frac{p}{12}} = C_0(1+i)^k(1+\frac{p}{12}i) = \text{80 000 (1+0,09)\^{}5 (1+((6/12)*0,09))}$$

$$= \text{128 628,96 MAD}$$

3.3.Taux proportionnels et taux équivalents :

Taux proportionnel:

Deux taux d'intérêts sont équivalents lorsqu'ils aboutissent, pour un même capital initial, à la même valeur acquise pendant la même durée de placement. **Ici on distingue entre intérêt simple et intérêt composé.**

Soit C: 10 000 avec un taux annuel de 10% pendant une durée de 1 année en intérêt simple:

On sait que V acquise = C(1+n*(t/100)

V acquise = 10 000 (1 + (1*(10/100)) = **11 000 MAD** en année (Ia = 10%)

V acquise = 10 000 (1+(2*(10/200)) = **11 000 MAD** en semestre (Is = 5%)

V acquise = 10 000 (1+(4*(10/400)) = **11 000 MAD** en trimestre (It = 2,5%)

V acquise = 10 000 (1 + (12*(10/1200)) = **11 000 MAD** mensuel (Im = 0,83%)

V acquise = 10 000 (1 + (360*(10/36000)) = **11 000 MAD** en jours (Ij = 0,027%)

On remarque que la valeur acquise est la même lorsqu'on utilise les taux proportionnels pour le même capital initial pendant la même durée de placement.

Intérêt composé:

On sait que Valeur acquise , pour le cas d'un intérêt composé, est:

Va = Co(1+i)^ n avec i =(t/100) en année

Reprenons l'exemple précédent:

Valeur acquise = 10 000 (1+(10/100))^1 = **11 000 MAD** (en année)

Valeur acquise = 10 000 (1+(10/200))^2 = **11 025 MAD** (en semestre)

Valeur acquise = 10 000 (1+(10/400)^4 = **11 038.13 MAD** (en trimestre)

Les valeurs acquises sont différentes l'une de l'autre. On remarque que le taux proportionnel n'est pas valable pour le système des intérêts composés. C'est la raison pour laquelle on utilise de taux d'équivalence.

Taux équivalents:

- Deux taux sont équivalents, lorsqu'à intérêt composé, ils aboutissent pour un même capital à la même valeur acquise pendant la même durée de placement.
- Soient deux placements définis respectivement par leurs taux (i1 et i2) et par leurs périodes (P1 et P2). Les placements sont effectués à taux équivalent s'ils aboutissent pour un même capital à la même valeur acquise. C'est-à-dire :

$$\boxed{C(1+i_1)^{P1} = C(1+i_2)^{P2}}$$

Exemple:

Soit un capital de 10 000 dh avec un taux d'intérêt de 10% pendant une durée d'une année. Quel est le taux semestriel équivalent à ce taux d'intérêt annuel.

On sait que C(1+Ia)^P1 = C(1+Is)^P2

10 000 (1+0,1)^1 = 10 000 (1+ Is)^2

(1+0,1) = (1+Is)^2

(1+0,1)^1/2 = (1+Is)

Is = [(1,1)^1/2] – 1 = **0,0488**

(4,88% est le taux semestriel équivalent aux taux annuel de 10%)

- De manière générale, le taux d'équivalence (Ie) c'est :

C(1+ia) = C(1+Ie)^k

Ie = [(1+ia)^1/k] – 1

Avec :

k : c'est l'équivalence d'une année en semestre; trimestre; mois ou jours.

Et ia: c'est le taux d'intérêt annuel

3.4. Calculs sur la formule fondamentale des intérêts composés :

❖ **Calcul du taux de capitalisation:**

On sait que Cn = Co(1+i)^n

À partir de là, on obtient:

i = [(V acquise/V actuelle)^(1/n)] – 1 Avec (i =t/100)

i = [(Cn/Co)^(1/n)] - 1

Exemple:

On place un capital initial d'un montant de 250 000 MAD sur une période annuelle de 5 ans. À la fin de la période, on se retrouve avec une valeur acquise de 340 000 MAD. calculez le taux de capitalisation annuel.

Réponse:

On sait que Cn = Co(1+i)^ n

$\Rightarrow 340.000 = 270.000 \times (1 + i)^5$.

$\Rightarrow (1+i)^5 = \frac{340.000}{250.000}$

$\Rightarrow 1+i = \left(\frac{340.000}{250.000}\right)^{\frac{1}{5}}$.

$\Rightarrow i = \left(\frac{340.000}{250.000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$.

$\Rightarrow$ i = 0,063427 (taux = 6,34% l'an).

Le taux de capitalisation annuel est de 6,34% par an.

❖ **calcul de la période de placement: cas des intérêts composés:**

Exemple:

Au bout de combien de temps, une somme double-t-elle par capitalisation semestrielle, avec un taux de 3% le semestre.

Solution:

On sait que Cn = Co(1+i)^n avec Cn = 2Co

Alors 2*Co = Co(1+i)^n

Donc (1+i)^n = 2

on sait que $\ln(x^n) = n \ln(x)$

⇒ n*ln(1+i) = ln 2

Ainsi, n = [ln2 / (ln(1+i)]

Application numérique:

N = ln2 / ln (1+ 0,03) = 23,44977225 semestres

On convertie en année, on obtient: n = 11 ans et 4 mois + (0,34931675*180)jrs

n = 11 ans et 4 mois et 63 jours

❖ **la valeur actuelle à intérêts composés: (Co)**

La valeur actuelle c'est la somme initiale placée, à intérêt composé, pour obtenir « Cn » après « n » période de placement. C'est le processus inverse de la capitalisation appelé **« actualisation »**.

En processus de capitalisation, on cherche Cn (valeur acquise)

En processus d'actualisation, on cherche Co (valeur initiale)

Exemple:

Quelle somme faut-il placer maintenant à intérêt composé au taux annuel de 7% pour obtenir dans 4 ans une valeur définitive de 75.000 dirhams.

Solution:

On sait que Cn = Co(1+i)^n

alors **Co = Cn(1+i)^-n**

Donc Co = 75 000*(1 + 0,07)^-4

Co = 57 217,14 MAD (dirhams).

MERCI DE VOTRE ATTENTION