

4. ANNUITES:

4.1. définition

Une annuité est définie comme une somme d'argent versée chaque année à la même date. C'est-à-dire une somme payée à intervalle de temps régulier. Pour le cas des Annuités, la période retenue est l'année. Or, on peut effectuer des paiements semestriels, trimestriels ou mensuels.

- **Une Annuité:** la période retenue en termes d'année.
- **Une semestrialité:** la période retenue en termes de semestre.
- **Une trimestrialité:** la période retenue en termes de trimestre.
- **Une mensualité:** la période retenue en termes de mois.



Une annuité a pour but de rembourser une dette ou encore construire un capital (capital retraite ou capital éducation par exemple)

4.2. Annuité constantes en fin de période:



La valeur acquise au moment du dernier versement après « n » période d'annuité c'est:

$$A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (\text{Formule de capitalisation})$$

Avec:

a: le montant d'annuité ou de versement (constant)

i: le taux d'intérêt.

n: le nombre d'annuité (ou versement)

An: la valeur acquise à la date du versement de la dernière annuité.

Exemple 1:

Calculez la valeur acquise au moment du dernier versement par une suite de 15 annuités d'une valeur de 35000 MAD avec un taux d'intérêt annuel de 10%.

Exemple 2:

Combien faut-il verser chaque semestre pendant une durée de 8 ans afin de constituer, au moment du dernier versement, un capital de 450 000 MAD. Sachant que le taux semestriel est de 4,5%.

Applications:

Exercice 1 :

1. Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement par une suite de 10 annuités constantes de fin de période de 17.500 dirhams chacune. Capitalisation de 8% l'an. Ainsi que l'intérêt produit de cette opération.

SEANCE : 17/03/2020

2- Calculer la valeur de cette même suite **sept mois** après le dernier versement.

Explication : Une fois on arrive à la dernière annuité, on travaille avec le système des intérêts composés (avec la somme des annuités comme valeur actuelle C_0). Comme nous avons vu auparavant, dans le système des intérêts composés, **si la période de placement est une période fractionnelle**, c'est-à-dire composée des années et des mois, on distingue entre deux solutions: solution rationnelle et solution commerciale).

Solution rationnelle:

On sait que $C_{k+\frac{p}{12}} = C_0(1+i)^k(1+\frac{p}{12}i)$ Avec p : nombre de mois
et k : nombre d'années

$$C_{0+\frac{7}{12}} = A_{10}(1+i)^0\left(1+\frac{7}{12}i\right)$$

$$C_{0+\frac{7}{12}} = 253.514,84\left(1+0,08\times\frac{7}{12}\right) = 265\,345,53 \text{ dirhams}$$

Solution commerciale:

On sait que : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{p}{q}}$

$$\Rightarrow C_{0+\frac{7}{12}} = A_{10}(1+i)^{0+\frac{7}{12}}$$

$$\Rightarrow C_{0+\frac{7}{12}} = 253.514,84(1+0,08)^{0+\frac{7}{12}} = 265.155,46 \text{ dirhams.}$$

3- Calculer la valeur de cette même suite **un an et neuf mois** après le dernier versement. (voir explication diapo suivante)

Solution rationnelle:

$$\text{On sait que : } C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^k\left(1+\frac{p}{q}i\right)$$

$$\Rightarrow C_{1+\frac{9}{12}} = A_{10}(1+i)^1\left(1+\frac{9}{12}i\right) = 290.223,79 \text{ dirhams.}$$

Solution commerciale:

On sait que : $C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{p}{q}}$

$$\Rightarrow C_{1+\frac{9}{12}} = A_{10}(1+i)^{1+\frac{9}{12}}$$

$$\Rightarrow C_{1+\frac{9}{12}} = 253.514,84(1+0,08)^{1+\frac{9}{12}} = 290.064,75 \text{ dirhams.}$$

Explication : (Question 3)

Une fois on arrive au dernier versement, on commence le système des intérêts composés (avec la somme des versements comme valeur actuelle ($C_0 = A_{10}$)). Même principe que dans le cadre du système des intérêts composés, si la période de placement est fractionnelle, on travaille avec **la solution rationnelle et la solution commerciale**.

Exercice 2 : Quelle somme constante faut-il verser chaque année à la même date pour constituer en 12 versements deux ans après le dernier versement un capital de 500.000 dirhams chacune. Taux est de 8% l'an.

Explication : après le dernier versement, on travaille avec le principe du système des intérêts composés (avec la somme des versements comme valeur actuelle (**ici $C_0 = A_{12}$**)). Dans cet exercice, la période de placement est **un nombre entier (deux ans)**.

Solution:**On cherche la somme constante « a »**

On sait que $C_n = C_0 (1+i)^n$

$$C_n = A_{12} (1+i)^n \text{ avec } C_n = 500\,000 \text{ et } n = 2$$

$$\text{Alors } 500\,000 = A_{12} (1+i)^2 \quad \textcircled{1}$$

On sait également que $A_{12} = a [((1+i)^{12}) - 1] / i$; on remplace A_{12} en $\textcircled{1}$

$$\Rightarrow 500.000 = a \frac{(1+i)^{12} - 1}{i} (1+i)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{500.000 \times i}{[(1+i)^{12} - 1](1+i)^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{500.000 \times 0,08}{[(1+0,08)^{12} - 1](1+0,08)^2} = 22.588,74 \text{ dirhams}$$

Exercice 3 :

Calculer un mois après le dernier versement la valeur acquise par une suite de 72 mensualités de 2.500 dirhams chacune. Taux est de 7% l'an. (**voir explication**)

Explications (exercice 3) :

Nous savons déjà qu'on doit homogénéiser entre la période de placement et le taux d'intérêt. Dans notre exemple, le taux est annuel alors que la période est en mois ainsi que le montant d'annuité (a), c'est pourquoi on doit calculer le taux d'intérêt mensuel étant donnée que la période de placement est mensuelle. On se réfère toujours à l'unité de «a», s'elle est exprimée en mois (on homogénéise en termes de mois, s'elle est exprimée en année, on homogénéise en termes d'année...)

(pour homogénéiser, pour le cas des annuités, on utilise le taux d'équivalent) même principe que pour les intérêts composés.

Solution:

On sait que $C_n = C_0 (1+i)^n$ avec n : période de placement (un mois)
 $\Rightarrow C_n = A_{72} (1+im)^{72}$ avec $A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
 n : nombre de mensualités

Il faut alors calculer «im», on utilise pour cela le taux d'équivalence:

La formule du taux d'équivalence est :

$$C(1+ia) = C(1+im)^k \Rightarrow im = [(1+ia)^{1/k}] - 1$$

$$im = ((1+0.07)^{(1/12)}) - 1 = 0,005654145$$

Donc:

$$A = 222\,651,48 \text{ dirhams}$$

4.3. Valeur à l'origine d'une suite d'annuité constante de fin de période :

Le but est de déterminer la valeur actuelle une période avant d'effectuer le premier versement d'une suite d'annuité constante de fin de période (A_0):



On sait que : $C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_0 = C_n(1+i)^{-n}$ (cas des intérêts composés)

Pour les cas des Annuités : (voir explication diapo suivante)

$$\Rightarrow A_0 = A_n(1+i)^{-n} \text{ avec } A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \text{ (Formule de capitalisation)}$$

Donc: $\Rightarrow A_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \text{ (Formule d'actualisation).}$

Explication : nous avons déjà vu auparavant comment calculer la valeur actuelle pour le cas des intérêts composés, principe de capitalisation (C_n) et d'actualisation (C_0). On suit le même processus, pour le cas des annuités, on a déjà su comment calculer la valeur acquise dans une suite d'annuité (**capitalisation**). Maintenant, on va essayer de savoir comment calculer la valeur actuelle (c'est-à-dire à l'instant t_0) d'une suite d'annuité de fin de période (**actualisation**). Par exemple, la situation d'un emprunt du montant A_0 qu'on doit rembourser par versement d'une suite d'annuité d'une somme constante «a».

Exercice 4:

Calculer un an avant le premier versement la valeur actuelle d'une suite de **10 annuités** constantes de **17.500 dirhams** chacune, **taux = 9% l'an**. Calculer la valeur actuelle de cette même suite **3 ans** avant le premier versement, **taux = 7,5%**.

Réponse : (avec explication)

Première étape : calculer la valeur actuelle A_0 (en appliquant la formule du diapositive précédente) $A_0 = 112\,309,0098$ MAD.

Deuxième étape : On cherche à calculer la valeur actuelle de cette même suite **3 ans** avant le premier versement : **3 ans avant le premier versement équivaut à calculer la valeur actuelle 2 ans avant la valeur actuelle A_0** .

$$A_{-2} = A_0 (1+i)^{-2} = 110643,13 \text{ MAD}$$

Exercice 5:

Une dette de **300.000** dirhams est remboursable en **20 trimestrialités** constantes, le premier versement **dans 3 mois**, **taux = 9% l'an**. Calculer le montant de la trimestrialité de remboursement.

Réponse : (avec explication):

Selon notre exercice, on cherche à calculer «a». La **première étapes** c'est d'homogénéiser entre le taux et la période en appliquant le taux d'équivalence;

Deuxième étape : en utilisant la formule d'actualisation (diapo 58), avec $A_0 = 300\,000$ (selon l'exercice), on fait ressortir «a» de la relation. Après les calculs : **a = 18 663,35 MAD**

Exercice 6 :

1. Calculer la valeur à l'origine de 72 mensualités de 1.500 dirhams chacune. Taux est de 12% l'an.
2. Calculer au même taux la valeur de ces mensualités 12 mois avant le premier versement.

Réponse : (avec explication)

1. **Même principe que l'exercice 3** : homogénéiser période et taux (taux d'équivalence = 0,00948). En appliquant la formule d'actualisation (cas d'annuité) on obtient :

$$A_0 = 77.992,36$$

2. On travaille avec le taux annuel en transformant 12 mois en une année : **on cherche à calculer la valeur actuelle 1 an avant la valeur actuelle A_0** .

$$A_{-1} = A_0 (1 + 0,12)^{-1} \text{ alors } A_{-1} = 69.636,03$$

FIN de la séance