Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Soit E l'expérience de Bernoulli.
- Soit **A l'événement** qui nous concerne.
- Soit **p la probabilité de succès** (réalisation de A) et q la probabilité d'échec.
- On répète l'expérience E **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.
- Soit X= « le nombre de succès obtenu dans une expérience».

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si A est réalisé} \\ 0 & \text{, Si non} \end{cases} \qquad \text{où :} \qquad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Exemple:

- Soit l'expérience aléatoire suivante: 'lancement d'une pièce de monnaie '.

  On note par P = 'Pile' et F ='Face'. On répète cette expérience **deux fois**, alors les résultats possibles sont: PP,PF,FP,FF.

- Soit X le nombre de pile obtenu dans cette expérience aléatoire.

- X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs suivantes: 0,1 et 2.

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant:

x_i	**0**	**1**	**2**	$\sum_i p_i$
$p(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\Rightarrow \quad p(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Soit Y= « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences».

- La probabilité d'obtenir k succès exactement au cours des n expérience, i.e : $p\left[Y=k\right]$

- Soit E un ensemble constitué de n éléments (évènements). On veut former une disposition D de ***k* succès (réalisation de A)** à partir de l'ensemble E, i.e:

$$E=\left\{\underbrace{A,A,\ldots A,}_{k \text{ fois}} \quad \underbrace{\bar{A},\bar{A},\ldots,\bar{A}}_{(n-k)\text{ fois}}\right\}$$

L'événement D : « obtenir k réalisations de A lors des n expériences aléatoires ».

- Sachant que les événements sont indépendants alors la probabilité d'apparition de D est donnée par:

$$p\left(D\cap\bar{D}\right)=p\left(D\right)\times p\left(\bar{D}\right)\underbrace{=p\times p\ldots p}_{k \text{ fois}}\times\underbrace{q\times q\ldots q}_{(n-k)\text{ fois}}=p^{k}\times q^{n-k}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Le nombre des dispositions contenant **k fois** l'événement A est égal à C_n^k . Donc

$$p\left[Y=k\right]=C_n^k p^k q^{n-k}$$

- Y est une variable aléatoire qui suit **la loi Binomiale**, notée B(n,p) , qui est définie comme suit :

$$p:\left\{0,1,2,...,n\right\}\rightarrow\left[0,1\right]$$

$$Y\rightarrow p(Y)=p\left[Y=k\right]=C_n^k p^k q^{n-k}$$

On écrit Y $\rightarrow$ B(n,p)

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Remarques

- Soit X= « le nombre de succès obtenu dans une expérience».

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si A est réalisé} \\ 0 & \text{, Si non} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

- Soit Y= « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences indépendantes».

$$\Rightarrow \quad Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli.

Les propriétés de Y sont :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np.q = np(1-q)$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Exemple

On lance un dé 5 fois. On s'intéresse au nombre 3 obtenu en total, i.e: la somme des résultats (numéros du dé) obtenu est égale à 3.

Soit X une variable aléatoire qui désigne la somme des résultats obtenus.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 1/6$. C'est-à-dire :

$$X \sim B(5\ ;\ 1/6)$$

$$\begin{aligned} p &= p[X = 3] \\ &= C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{250}{7776} = 0.032. \end{aligned}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Binomiale

Exemple:

Une photocopieuse produit des copies dont 1/3 sont défectueuses.

1. Caractériser la loi de probabilité de ce phénomène.
2. Calculer le nombre moyen de photocopies défectueuses et sa probabilité associée dans un paquet de 39 copies réalisées par la photocopieuse.

1. La photocopie réalisée est soit bonne soit non. Donc il s'agit d'une répétition de l'expérience de Bernoulli. Le phénomène peut être donc correctement modélisé par une loi binomiale. On aura donc :

$$X \square B\left(39\ ;\ \frac{1}{3}\right)$$

2. On a:

$$E(X) = np = 13 \qquad \text{et} \qquad p[X = 13] = C_{39}^{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{26} = 0{,}135$$

Exercice 1:

Dans un lycée 50 professeurs, la probabilité qu'un professeur tombe malade est 0,01.

1.Calculer la probabilité

a) Qu'aucun professeur soit malade.
b) Cinq professeurs soient malades .
c) Au moins un professeur soit malade.
d) Au plus 3 professeurs soient malades.

2 .Calculer l'espérance mathématique solution

X variable aléatoire compte le nombre de professeurs malades .
Ω={0 ;1;2; 3;.....;50}
X suit la loi binomiale des paramètres n=50 et p=0,01

Solution :

On a P(X=k)=$C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

1.a) P(X=0) : aucun professeur soit malade.
P(X=0) =$C_{50}^0 (0{,}01)^0 \times (0{,}99)^{50}$
b) P(X=5) =$C_{50}^5 (0{,}01)^5 \times (0{,}99)^{50-5}$
c) P(X≥1)= P(X=1) + P(X=2) +.....+ P(X=50)
=1- P(X=0)
=1- $C_{50}^0 (0{,}01)^0 \times (0{,}99)^{50}$
d) P(X≤3)= P(X=0) +P(X=1) + P(X=2)+ P(X=3)
2. E(X)=np
=50×0,01=0,5

Exercice 2:

Dans une fromagerie la probabilité de tomber sur un fromage non conforme (fromage défectueux) est p=0,07, supposons qu'on a 25 fromages.

1) **Déterminer les caractères de la loi de probabilité B(n ;p) .**
2) **Calculer l'espérance mathématique et l'écart type.**
3) **Quelles est la probabilité de tomber sur 2 fromages non conforme.**
4) **Calculer la probabilité de tomber au maximum sur 2 fromages non conforme.**
5) **Calculer la probabilité de tomber au minimum 2 fromages non conforme.**
6) **Calculer la probabilité de tomber sur 3 a 5 fromages non conforme.**
7) **Nous voulons arriver à une probabilité de 0,1 , qui correspond a aucun fromage non conforme, déterminer l'échantillon à étudier .**