Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Soit E l'expérience de Bernoulli.
- Soit **A l'événement** qui nous concerne.
- Soit **p la probabilité de succès** (réalisation de A) et q la probabilité d'échec.
- On répète l'expérience E **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.
- Soit X= « le nombre de succès obtenu dans une expérience».

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si A est réalisé} \\ 0 & \text{, Si non} \end{cases} \qquad \text{où :} \qquad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Exemple:

- Soit l'expérience aléatoire suivante: 'lancement d'une pièce de monnaie '.

  On note par P = 'Pile' et F ='Face'. On répète cette expérience **deux fois**, alors les résultats possibles sont: PP,PF,FP,FF.

- Soit X le nombre de pile obtenu dans cette expérience aléatoire.

- X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs suivantes: 0,1 et 2.

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant:

x_i	**0**	**1**	**2**	$\sum_i p_i$
$p(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\Rightarrow \quad p(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Soit Y= « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences».

- La probabilité d'obtenir k succès exactement au cours des n expérience, i.e : $p\left[Y=k\right]$

- Soit E un ensemble constitué de n éléments (évènements). On veut former une disposition D de ***k* succès (réalisation de A)** à partir de l'ensemble E, i.e:

$$E=\left\{\underbrace{A,A,\ldots A,}_{k \text{ fois}} \quad \underbrace{\bar{A},\bar{A},\ldots,\bar{A}}_{(n-k)\text{ fois}}\right\}$$

L'événement D : « obtenir k réalisations de A lors des n expériences aléatoires ».

- Sachant que les événements sont indépendants alors la probabilité d'apparition de D est donnée par:

$$p\left(D\cap\bar{D}\right)=p\left(D\right)\times p\left(\bar{D}\right)\underbrace{=p\times p\ldots p}_{k \text{ fois}}\times\underbrace{q\times q\ldots q}_{(n-k)\text{ fois}}=p^{k}\times q^{n-k}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

- Le nombre des dispositions contenant **k fois** l'événement A est égal à C_n^k . Donc

$$p\left[Y=k\right]=C_n^k p^k q^{n-k}$$

- Y est une variable aléatoire qui suit **la loi Binomiale**, notée B(n,p) , qui est définie comme suit :

$$p:\left\{0,1,2,...,n\right\}\rightarrow\left[0,1\right]$$

$$Y\rightarrow p(Y)=p\left[Y=k\right]=C_n^k p^k q^{n-k}$$

On écrit Y $\rightarrow$ B(n,p)

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Remarques

- Soit X= « le nombre de succès obtenu dans une expérience».

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, Si A est réalisé} \\ 0 & \text{, Si non} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} p = p(A) \\ q = 1 - p \end{cases}$$

- Soit Y= « le nombre de succès obtenu au cours de n expériences indépendantes».

$$\Rightarrow \quad Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli.

Les propriétés de Y sont :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np.q = np(1-q)$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Binomiale

Exemple

On lance un dé 5 fois. On s'intéresse au nombre 3 obtenu en total, i.e: la somme des résultats (numéros du dé) obtenu est égale à 3.

Soit X une variable aléatoire qui désigne la somme des résultats obtenus.

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 1/6$. C'est-à-dire :

$$X \sim B(5\ ;\ 1/6)$$

$$\begin{aligned} p &= p[X = 3] \\ &= C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{250}{7776} = 0.032. \end{aligned}$$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Binomiale

Exemple:

Une photocopieuse produit des copies dont 1/3 sont défectueuses.

1. Caractériser la loi de probabilité de ce phénomène.
2. Calculer le nombre moyen de photocopies défectueuses et sa probabilité associée dans un paquet de 39 copies réalisées par la photocopieuse.

1. La photocopie réalisée est soit bonne soit non. Donc il s'agit d'une répétition de l'expérience de Bernoulli. Le phénomène peut être donc correctement modélisé par une loi binomiale. On aura donc :

$$X \square B\left(39\ ;\ \frac{1}{3}\right)$$

2. On a:

$$E(X) = np = 13 \qquad \text{et} \qquad p[X = 13] = C_{39}^{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{26} = 0{,}135$$

Exercice 1:

Dans un lycée 50 professeurs, la probabilité qu'un professeur tombe malade est 0,01.

1.Calculer la probabilité

a) Qu'aucun professeur soit malade.
b) Cinq professeurs soient malades .
c) Au moins un professeur soit malade.
d) Au plus 3 professeurs soient malades.

2 .Calculer l'espérance mathématique solution

X variable aléatoire compte le nombre de professeurs malades .
Ω={0 ;1;2; 3;.....;50}
X suit la loi binomiale des paramètres n=50 et p=0,01

Solution :

On a P(X=k)=$C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

1.a) P(X=0) : aucun professeur soit malade.
P(X=0) =$C_{50}^0 (0{,}01)^0 \times (0{,}99)^{50}$
b) P(X=5) =$C_{50}^5 (0{,}01)^5 \times (0{,}99)^{50-5}$
c) P(X≥1)= P(X=1) + P(X=2) +.....+ P(X=50)
=1- P(X=0)
=1- $C_{50}^0 (0{,}01)^0 \times (0{,}99)^{50}$
d) P(X≤3)= P(X=0) +P(X=1) + P(X=2)+ P(X=3)
2. E(X)=np
=50×0,01=0,5

Exercice 2:

Dans une fromagerie la probabilité de tomber sur un fromage non conforme (fromage défectueux) est p=0,07, supposons qu'on a 25 fromages.

1) **Déterminer les caractères de la loi de probabilité B(n ;p) .**
2) **Calculer l'espérance mathématique et l'écart type.**
3) **Quelles est la probabilité de tomber sur 2 fromages non conforme.**
4) **Calculer la probabilité de tomber au maximum sur 2 fromages non conforme.**
5) **Calculer la probabilité de tomber au minimum 2 fromages non conforme.**
6) **Calculer la probabilité de tomber sur 3 a 5 fromages non conforme.**
7) **Nous voulons arriver à une probabilité de 0,1 , qui correspond a aucun fromage non conforme, déterminer l'échantillon à étudier .**

Solution : (le dernier exercice)

1) n=25 ; p=0,07
2) Espérance mathématique :
   E(X)=n*p=25×0,07=1,75
   Ecart type : $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{25 \times 0{,}07 \times 0{,}93} = 1{,}27$
3) Qu'il est la probabilité de tomber sur 2 fromages non conforme .

$$(P(X=k) = C_n^k \times P^k \times q^{n-k})$$

$$P(X=2) = C_{25}^2 \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^{23} \qquad (n=25 ; p=0{,}07 ; q=0{,}93)$$

$$= 300 \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^{23} = 0{,}28$$

4) Calculer la probabilité de tomber au maximum sur 2 fromages non conforme.

$$P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= C_{25}^0 \times 0{,}07^0 \times 0{,}93^{25} + C_{25}^1 \times 0{,}07^1 \times 0{,}93^{24} + 0{,}28$$

$$= 0{,}16 + 0{,}31 + 0{,}28$$

$$= 0{,}75$$

Il y a 75% de chance de tomber sur au maximum 2 fromages défectueux parmi 25

5) $P(X\geq 2) = 1 - P(X<2)$

$$= 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

6) la probabilité de tomber sur 3 a 5 fromages non conforme revient à calculer

$$P(3\leq X\leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

7) P(X=0) correspond a aucun fromage non conforme

$$P(X=0) = 0{,}1$$

⇨ $C_n^0 \times 0{,}07^0 \times 0{,}93^n = 0{,}1$

⇨ $0{,}93^n = 0{,}1$

$\ln(0{,}93^n) = \ln(0{,}1)$

$n \ln(0{,}93) = \ln(0{,}1)$

⇨ $n = 32$

Lois Discrètes Usuelles : Loi Géométrique

- Soient **E l'expérience de Bernoulli** et **A l'événement « succès »** de probabilité **p.**

  La probabilité $\overline{A}$ est égale à **q = 1-p**.

- On répète l'expérience E **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.

- Soit X = « le nombre d'expérience E avant l'obtention de l'événement A pour la première fois».

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Géométrique

- $p[X = k]$ représente la probabilité que l'événement A se produit pour la première fois durant la k^{ème} expérience.

- Les (k-1) expériences précédentes ont pour résultat l'événement contraire $\overline{A}$

- Comme les expériences sont indépendantes, alors $p[X = k] = q^{k-1}p$

On écrit X $\rightarrow$ G(p)

Les propriétés de X sont :

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Lois Discrètes Usuelles : Loi de Géométrique

Exemple

On lance un dé plusieurs fois jusqu'à l'apparition de la face N°1. Quelle est la probabilité d'obtenir la face N°1 pour la première fois au 20ème lancer.

Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face N°1 pour la première fois.

On a : $A = \{1\}$ et $\bar{A} = \{2,3,4,5,6\}$.

Alors $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ Donc:

$$p[X = 20] = p\left(\underbrace{\bar{A}\ et\ \bar{A}\ et \ldots .et\ \bar{A}}_{19.\ fois};\ et\ A\right) = \underbrace{p(\bar{A}) \times p(\bar{A}) \times \ldots \times p(\bar{A})}_{19.\ fois} \times p(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{19} \times \frac{1}{6}$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

- La loi de Poisson est utilisée lorsque il s'agit d'étude d'un phénomène durant un laps infiniment petit. Elle est utilisée aussi dans les phénomènes d'attentes , les contrôles de qualité et en assurance.

- Une variable aléatoire discrète X suit **une loi de Poisson** si : $p(X=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$

  où λ est un paramètre positif. On écrit $X \square P(\lambda)$.

Les propriétés de X sont :

- $E(X)=\lambda$
- $V(X)=\lambda$

Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

Exemple

Soit X le nombre des arrivées des clients à un guichet bancaire.

Supposons que X suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Calculer les probabilités suivantes :

a) aucun client n'arrive au guichet,

b) plus de 2 clients arrivent au guichet,

c) entre 3 et 7 clients arrivent au guichet.

a)

$$p\{X = 0\} = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = e^{-4} = 0{,}018$$

Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

b)

$$p\{X \geq 3\} = 1 - p[X \leq 2]$$

$$= 1 - [p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]]$$

$$= 0{,}762$$

c)

$$p\{3 \leq X \leq 7\} = p[X \leq 7] - p[X \leq 3]$$

$$= p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7]$$

$$= 0{,}711$$

Université Zohr **Année universitaire: 2019-2020**
Ecole Suprieur de Technologie **Cours de Probabilité & Statistique**
- Laayoune

Série N°3

Exercice avec solution .

Exemple: Loi Géométrique

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule jusqu' obtenir une boule blanche.

X suit une loi géomtérique de paramtre $p = \frac{4}{10} = 0,4$

$P(X = k) = 0,6^{k-1} \times 0,4$

$P(X = 1) = 0,6^0 \times 0,4$

$P(X = 2) = 0,6^1 \times 0,4$

$P(X = 3) = 0,6^2 \times 0,4$

$P(X = 15) = 0,6^{14} \times 0,4$

$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

Exercice 2. Lors d'une enquête, on a interrogé 5 hommes et 3 femmes. On choisit au hasard et sans remise les personnes une à une jusqu'à obtention d'un homme. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1- Déterminer les valeurs de X et sa loi de probabilité.

2- Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 3. Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages avec remise jusqu' obtention d'une boule blanche. 1- Déterminer la loi de probabilité de X.

2-Calculer $P(X = 3)$

Exercice 4. Vous avez besoin d'une personne aider dé ménager. Quand vous téléphonez un ami. il y aune chance sur quatre qu'il accepte.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'amis que vous devrez contacter pour obtenir cette aide.

1- Déterminer la loi de probabilité de X

2-Calculer $P(X = 4); P(X < 4)$

Exercice 5. On admet que le nombre X d'accident survenant annuellement dans une grande entreprise obéit une loi de poisson de paramtre 3

Calculer la probabilité des événement suivants:

1- aucun accident ne survien pendant l'anne

2- au moins 4 accdent survienne dans l'anne

3-moins de 4 accdent survienne dans l'anne

Exercice 6. La moyenne des voitures qu'elles déclarent une accident pendant une journée dans une poste de police est de 4 voitures .

1- déterminer de quelles loi s'agit-elles?

2- calculer la probabilité pour que au plus une voiture déclare une accident.

3- caluler la probabilité pour que au moins 2 voitures déclarent une accident.