Université Ibn Zohr **Année universitaire: 2019-2020**
Ecole Suprieur de Technologie **Cours de Probabilité**
- Laayoune

Série N°3

Exercice avec solution .

Exemple: Loi Géométrique

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule jusqu' obtenir une boule blanche.

X suit une loi géomtérique de paramtre $p = \frac{4}{10} = 0,4$

$P(X = k) = 0,6^{k-1} \times 0,4$

$P(X = 1) = 0,6^0 \times 0,4$

$P(X = 2) = 0,6^1 \times 0,4$

$P(X = 3) = 0,6^2 \times 0,4$

$P(X = 15) = 0,6^{14} \times 0,4$

$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

Exercice 2. Lors d'une enquête, on a interrogé 5 hommes et 3 femmes. On choisit au hasard et sans remise les personnes une à une jusqu'à obtention d'un homme. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1- Déterminer les valeurs de X et sa loi de probabilité.

2- Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Solution

1-La variable aléatoire X suit une loi géométrique(de Pascale) avec $p = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$

2-espérance $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{8}{5}$

Ecart type $\rho(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = ...$

Exercice 3. Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages avec remise jusqu' obtention d'une boule blanche. 1- Déterminer la loi de probabilité de X.

2-Calculer $P(X = 3)$

Solution

1-Les tirages sont effectus jusqu' ce que l'on obtienne une boule blanche, donc la variable X suit une loi géométrique de paramétre p = 1/2 puisque c'est la probabilité de tirer une boule blanche :

2-$P(X = k) = 0,5^{k-1} \times 0,5$

$P(X = 3) = 0,5^2 \times 0,5 = 0,125$

Exercice 4. Vous avez besoin d'une personne aider dé ménager. Quand vous téléphonez un ami. il y aune chance sur quatre qu'il accepte.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'amis que vous devrez contacter pour obtenir cette aide.

1- Déterminer la loi de probabilité de X

2-Calculer $P(X = 4); P(X < 4)$

Solution

1- La v. a. X suit une loi géométrique (de Pascal) ; pour tout entier $k \leq 1$:

$P(X = k) = (\frac{3}{4})^K \times 0,25$

$P(X = k) = (\frac{3}{4})^K \times \frac{1}{4} = \frac{3^{k-1}}{4^k}$

$P(X = 4) = \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{256}$

2-$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

Exercice 5. On admet que le nombre X d'accident survenant annuellement dans une grande entreprise obéit une loi de poisson de paramtre 3

Calculer la probabilité des événement suivants:

1- aucun accident ne survien pendant l'anne

2- au moins 4 accdent survienne dans l'anne

3-moins de 4 accdent survienne dans l'anne

Solution

1- La v. a. X suit une loi de Poisson $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
$P(X=0)=e^{-3}\frac{3^0}{0!}=e^{-3}$
2-$P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)$
3-P(X $\prec$ 4) $=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

<u>Exercice 6</u>. La moyenne des voitures qu'elles déclarent une accident pendant une journée dans une poste de police est de 4 voitures .

1- déterminer de quelles loi s'agit-elles?
2- calculer la probabilité pour que au plus une voiture déclare une accident.
3- caluler la probabilité pour que au moins 2 voitures déclarent une accident.

Solution

1- La loi de poisson avec $\lambda=4$
2-$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-4}\frac{4^0}{0!}+e^{-4}\frac{4^1}{1!}=5e^{-4}$
3-$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)$

Chapitre 4

Variables Aléatoires Continue

à une Seule Dimension

Fonction de densité

1. Définition

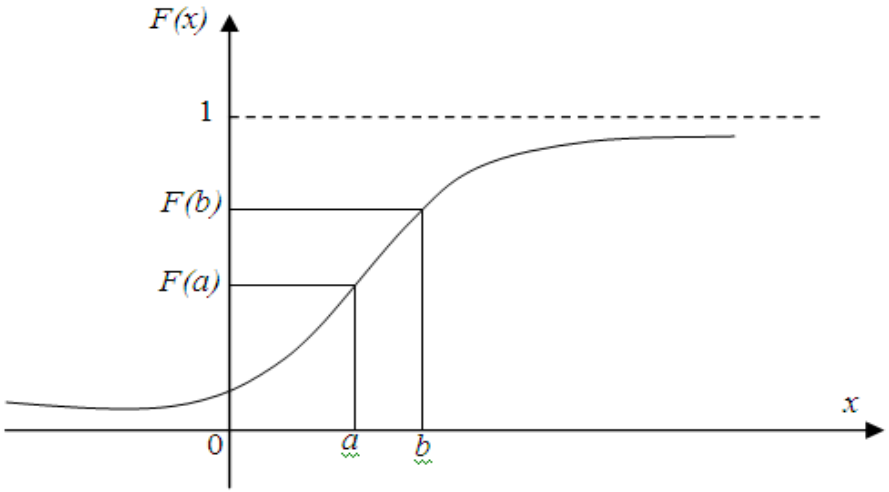
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

La variable X est dite continue s'il existe une fonction positive f telle que :

$$F(x) = \int_{-\alpha}^{x} f(t)\,dt \ ,\forall x \in \square \qquad (18)$$

La fonction f est appelé **densité de probabilité** de X**.**

F est une fonction positive, croissante, telle que : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

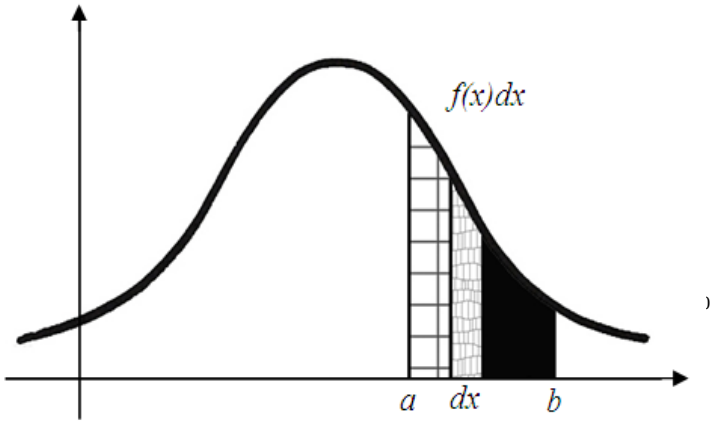


Graphique 1 : *Courbe de la fonction de répartition*

Fonction de densité

La fonction de densité de probabilité de X vérifie les conditions suivantes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$
- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$
- Si f est continue en x_0 alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$



Graphique 2 : *Courbe de densité*

Remarque : La fonction de densité de probabilité f est appelée aussi la loi de X.

Fonction de densité

Exemple 1:

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.Vérifier que f une fonction de densité de probabilité

2. Calculer la fonction de répartition

3. Représenter le graphique de f et de F

4. Calculer $P(0.5 \leq X \leq 0.7)$

5. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$ à l'aide de $M_X(t)$

Fonction de densité

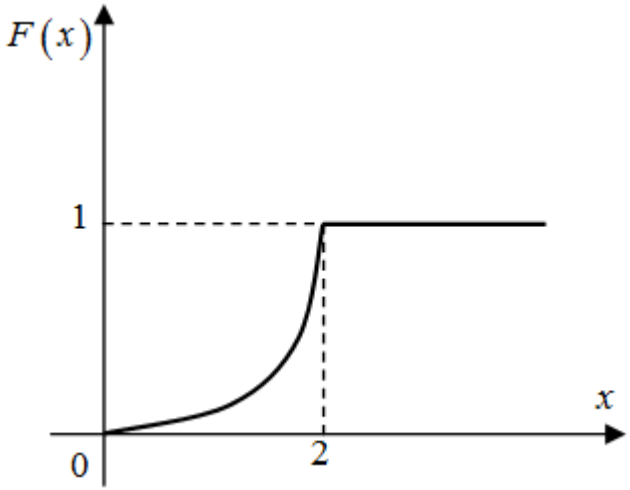
Solution

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx \quad = \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2}-0\right] = 1.$$

2)

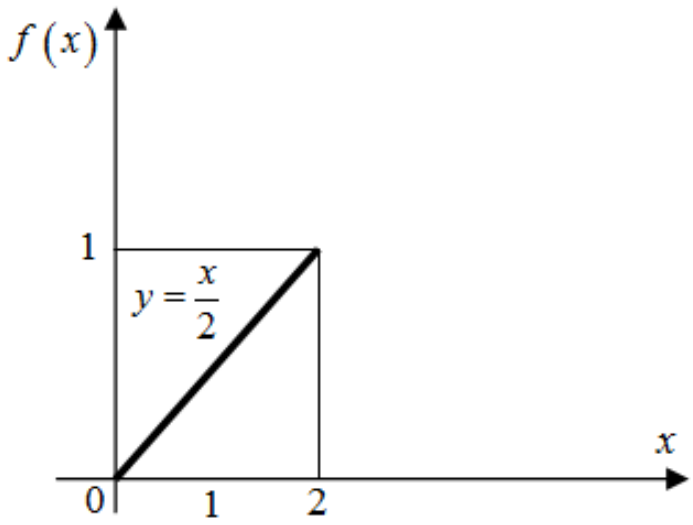
$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$



$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

Fonction de densité

3)



4)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Fonction de densité

et $$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^2 x^2 f(x)\,dx-\left(\frac{16}{9}\right)$$

$$=\int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2-\frac{16}{9}=\frac{16}{8}-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}$$

$$=\frac{18-16}{9}=\frac{2}{9}. \quad \Longrightarrow \quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

L'espérance mathématique et la variance

1. L'espérance mathématique

L'espérance mathématique ou l'espérance d'une variable aléatoire continue, notée $E(X)$, est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

2. La variance

La variance d'une variable aléatoire continue X, notée $V(X)$,est définie par :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

où:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

L'espérance mathématique et la variance

Propriétés :

Soient a et b deux constantes ; X et Y deux variables aléatoires continues

- $E(a) = a$ et $V(a) = 0$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer E(X) et V(X)

Changement de variables

Exemple:

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f définie comme suit:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}x^2, -2\le x\le 2\\ 0\end{cases}$$

Donner la fonction de densité de Y = -3X+1

Comme le domaine de définition de X est [-2,2] alors le domaine de définition de Y est [-5,7]

Ainsi si Y = -3X+1 alors $\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{3}$. Donc pour $-5\le y\le 7$ on a:

$$g(y)=\frac{3}{16}\left(\frac{y-1}{3}\right)^2\left|-\frac{1}{3}\right| \Rightarrow g(x)=\begin{cases}\frac{1}{144}(y-1)^2, -5\le x\le 7\\ 0\end{cases}$$