Statistique Descriptive

Ecole Superieur de Technologie de Laayoune

Université Ibn Zohr Agadir

SOMMAIRE

Chapitre 1

Introduction à la statistique

I. Définitions

1. La statistique

C’est une science qui consiste à collecter les données, les traiter , les analyser, les interpréter et les présenter en vue d’étudier un phénomène donné.

Exemple: Statistique descriptive, statistique décisionnelle,….

2. Les statistiques

Ce sont les informations et les données collectées auprès des établissements.

Exemple: indices de la bourse, taux de chômage , ….

3. La statistique descriptive

C’est l'ensemble des méthodes permettant de décrire, de résumer, de présenter les données.

II. Vocabulaires de base

1. Population

C'est l'ensemble des éléments ayant un caractère commun à étudier. On la note Ω.

Exemple : Les étudiants de la faculté Ain Sebâa.

2. Individu ou Unité statistique

C'est l'élément de la population. On le note ω.

Exemple : étudiant de la faculté Ain Sebâa.

3. Echantillon

C'est un sous-ensemble ou une partie de la population. On le note E.

Exemple : les étudiants S1 de la faculté Ain Sebâa.

II. Vocabulaires de base

4. Taille de la population

C'est le nombre d'éléments de la population. On le note N.

Exemple : le nombre d'étudiants de la faculté Ain Sebâa.

5. Caractère ou variable statistique

C'est une caractéristique ou propriété qui décrit un individu d'une population.

Elle est observée ou mesurée sur les individus d'une population. On le note X.

Exemple: Notes des étudiants

Il existe deux types de variables statistiques: **Les variables quantitatives**

et **les variables qualitatives**.

II. Vocabulaires de base

5.1 Variable qualitative

C’est une variable dont les modalités ne peuvent pas être mesurées.

Exemple: Langues (Arabe, Anglais, Français,...)

On peut distinguer deux types de variables qualitatives:

5.1.1 Variable qualitative nominale

C’est une variable dont les modalités ne sont pas ordonnées.

Exemple: Catégorie socioprofessionnelle (Ingénieur ,Technicien , …)

5.1.2 Variable qualitative ordinale

C’est une variable dont les modalités sont ordonnées.

Exemple: Mention (Très bien, Bien, Assez Bien,…)

II. Vocabulaires de base

5.2 Variable quantitative

C'est une variable dont les modalités prennent des valeurs numériques.

Exemple: le salaire mensuel d'un fonctionnaire,

On peut distinguer deux types de variables quantitatives:

5.2.1 Variable quantitative discrète

C'est une variable dont les modalités font partie d'un ensemble fini .

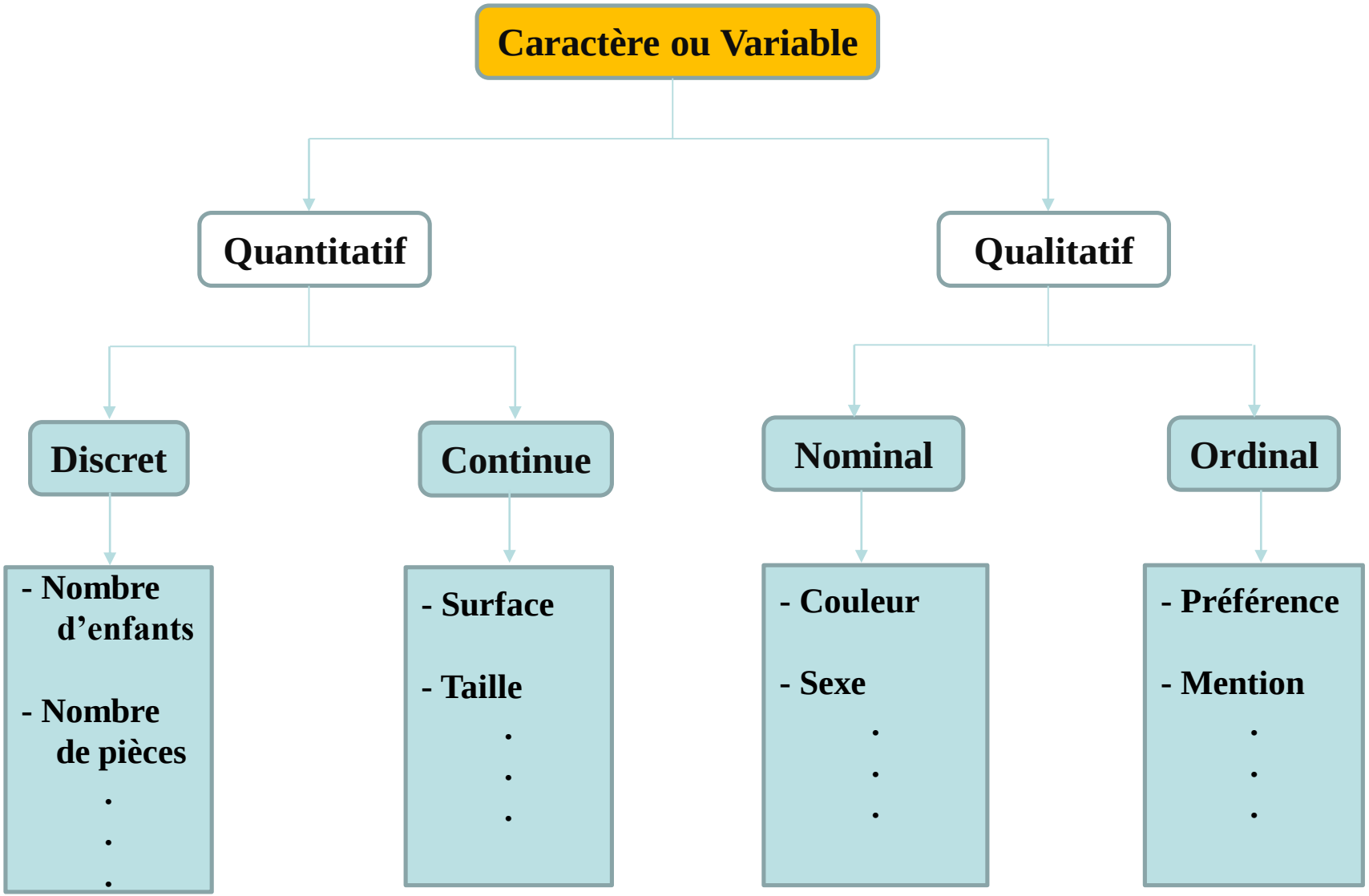
Exemple: Le nombre d'enseignants de ESTL.

5.2.2 Variable quantitative continue

C'est une variable dont les modalités prennent des valeurs dans un intervalle réel.

Exemple: Poids des cartables des élèves

II. Vocabulaires de base



II. Vocabulaires de base

Exemple 1: Caractère Qualitatif (Nominal)	
Ω = **Population**	Voitures du parking
X = **Caractère**	Couleur de voiture
x_i = **Modalités**	Bleu, Vert, Noire, …

Exemple 2: Caractère Qualitatif (Ordinal)	
Ω = **Population**	Amphi
i = **Individu**	Etudiant
X = **Caractère**	Mention
x_i = **Modalités**	Passable, Assez Bien, Bien, …

II. Vocabulaires de base

Exemple 3: Caractère Quantitatif (Discret)	
Ω = **Population**	Famille
X = **Caractère**	nombre d'enfant
x_i = **Modalités**	0, 2, 3, …

Exemple 2: Caractère Quantitatif (Continue)	
Ω = **Population**	Amphi
i = **Individu**	Etudiant
X = **Caractère**	Note
x_i = **Modalités**	[0,20]

II. Vocabulaires de base

7. Modalité

C'est la valeur d'une variable statistique**.** On la note x.

Exemple: Les modalités de la variable statistique « X = Note » sont : 9,15,11,….

Remarque importante:

Soient une population Ω et F un ensemble des modalités d'un caractère X.

X est une application de Ω dans F, i,e: $X : \Omega \mapsto F$

$$i \to X(i) = x_i$$

où :

- i est un individu de Ω
- $X(i)$ ou x_i est la valeur du caractère X pour l'individu i.

II. Vocabulaires de base

Echantillon de taille n = 5

Individu ou Unité statistique

Caractères

Modalités

- Prénom: Ali
- Taille en cm: 170
- Nombre d'enfants 1

Population de taille N = 30

II. Vocabulaires de base

8. L'effectif total

L'effectif total (taille) d'une population ou d'une série statistique (série brute) , noté **N** , est le nombre d'individus qui composent cette série ou population.

Exemple : Au cours d'un semestre, on a observé 20 élèves d'une école dont les notes sont données par le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	10	12	7	5	12	10	7	13	8
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
7	7	10	12	10	5	5	5	8	13

L'effectif total de cette série est N= 20

II. Vocabulaires de base

9. L'effectif

L'effectif $\mathbf{n_i}$ d'une modalité $\mathbf{x_i}$ est le nombre d'individus ayant cette modalité, ou le nombre de fois que la modalité $\mathbf{x_i}$ est observée.

Exemple :

Le classement de la série des 20 notes précédentes par ordre croissant donne les résultats suivants: **5,5,5, 5, 5, 7,7,7, 8,8, 8, 8, 8, 8,10,10,10,10, 10, 10,**

Les modalités obtenues après le regroupement des observations sont: **5,7,8** et **10**.

Donc on a:

La modalité	$x_1 = 5$	a pour effectif	$n_1 = 5$
La modalité	$x_2 = 7$	a pour effectif	$n_2 = 3$
La modalité	$x_3 = 8$	a pour effectif	$n_3 = 6$
La modalité	$x_4 = 10$	a pour effectif	$n_4 = 6$

II. Vocabulaires de base

Remarque: $$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 4+4+2+4+4+2 = \sum_{i=1}^{6} n_i = 20$$

10. L'effectif cumulé croissant $\mathbf{N_i}$ est le nombre d'individus présentant au plus la modalité $\boldsymbol{x_i}$.

$$N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$$

Exemple : Le nombre des élèves qui ont obtenu au plus la note 8 est :

$$N_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 4+4+2 = \sum_{k=1}^{3} n_k = 10$$

11. L'effectif cumulé décroissant N_i^d est le nombre d'individus présentant au mois la modalité $\boldsymbol{x_k}$.

$$N_i^d = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k = \sum_{j=i}^{k} n_j$$

Exemple : Le nombre des élèves qui ont obtenu au moins la moyenne est :

$$N_4^d = n_4 + n_5 + n_6 = 4 + 4 + 2 = \sum_{k=3}^{6} n_k = 10$$

12. Fréquence

La fréquence de la modalité x_i est le nombre d'individus possédant ce caractère divisé par l'effectif total de la population. On écrit:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Remarque

f_i est appelée aussi fréquence relative et on a :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$$

Exemple :

La fréquence des élèves qui ont obtenu 5 est égale à : $f_1 = \frac{4}{20} = 0,2$

II. Vocabulaires de base

13. Le Pourcentage ou fréquence en pourcentage d'un caractère

Il s'exprime comme suit:

$$p_i = f_i \times 100$$

14. Fréquence cumulée croissante est la proportion d'individus ayant des modalités du caractère étudié inférieures ou égales à x_i . On a :

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

Exemple :

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0.2 + 0.2 + 0.1 = \sum_{k=1}^{3} f_k = 0.5$$

15. Fréquence cumulée décroissante est la proportion d'individus ayant des modalités du caractère étudié supérieures ou égales à x_i . On a :

$$F_i^d = f_i + f_{i+1} + ... + f_k = \sum_{j=i}^{k} f_j$$

Exemple : $$F_3^d = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 = \sum_{k=3}^{6} f_k = 0.6$$

16. Distribution d'un caractère

On appelle distribution d'un caractère X, l'ensemble des couples:

$$\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)\}$$

On peut écrire aussi la distribution sous la forme suivante: $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), ..., (x_k, f_k)\}$

III. Applications Informatiques

Chapitre 2

Représentation des données

I. Tableaux Statistiques

On effectué une enquête sur 20 agriculteurs d'un petit village concernant leurs opinions vis-à-vis un produit agricole appelé GA. Les informations obtenues dans cette enquête sont :

	Nom et prénom	Nombre d'enfants	Revenu (Dh)	Opinion
1	Mohamed Amin	5	3000	Mauvaise (M)
2	Jamal Abid	2	2500	Bien (B)
3	Fouad Rahbi	1	4000	Passable (P)
4	Driss Khilo	4	2500	Très Bien (TB)
5	Mostafa Aydi	1	3000	Assez Bien (AB)
6	Ibrahim Asri	3	2500	Mauvaise (M)
7	Karim Chawki	5	4000	Bien (B)
8	Hamza Figig	4	5300	Assez Bien (AB)

I. Tableaux Statistiques

	Nom et prénom	Nombre d'enfants	Revenu (Dh)	Opinion
9	Monim Zarwal	6	1500	Très Bien (TB)
10	Ahmed Firgani	3	4000	Passable (P)
11	Abderhami Atar	1	3000	Bien (B)
12	Mohamed Rami	4	2000	Mauvaise (M)
13	Abdhamid mohi	2	2000	Assez Bien (AB)
14	Hamid Chifa	0	5000	Bien (B)
15	Tawfik Micram	5	6500	Très Bien (TB)
16	Bilala Talid	0	5300	Passable (P)
17	Youssef Swalam	4	6500	Mauvaise (M)
18	Ziyad Amo	2	1500	Passable (P)
19	Tarik Filil	1	1200	Bien (B)
20	Bouselham Malok	6	1500	Mauvaise (M)

1. Distribution d'un caractère

1.1 Cas d'un caractère qualitatif

Soit X un caractère qui désigne l'opinion des agriculteurs par rapport à un produit agricole appelé GA.

Les 5 valeurs possibles de ce caractère sont : $\{x_1 = M, x_2 = P, x_3 = AB, x_4 = B, x_5 = TB\}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
M	B	P	TB	AB	M	B	AB	TB	P	B	M	AB	B	TB	P	M	P	B	M

Donc la distribution de ce caractère est:

$$\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_6, n_6)\} = \{(M, 5), (P, 4), (AB, 3), (B, 5), (TB, 3)\}$$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau statistique de ce caractère est:

i	Modalité x_i	Effectif n_i	Effectif Cumulé Croissant N_i	Fréquence f_i	Fréquence Cumulé Croissante F_i
1	M	5	5	0,25	0,25
2	P	4	9	0,2	0,45
3	AB	3	12	0,15	0,6
4	B	5	17	0,25	0,85
5	TB	3	20	0,15	1
	Total N = 20	20		1	

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

$$N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$$

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau statistique de ce caractère est:

i	Modalité x_i	Effectif n_i	Effectif Cumulé Décroissant N_i^d	Fréquencef_i	Fréquence Cumulé Décroissante F_i^d
1	M	5	20	0,25	1
2	P	4	15	0,2	0,75
3	AB	3	11	0,15	0,55
4	B	5	8	0,25	0,4
5	TB	3	3	0,15	0,15
	Total N = 20	20		1	

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

$$N_i^d = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k = \sum_{j=i}^{k} n_j$$

$$F_i^d = f_i + f_{i+1} + \ldots + f_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau complet de la distribution de ce caractère est:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	N_i^d	F_i^d
M	5	5	0,25	0,25	20	1
P	4	9	0,2	0,45	15	0,75
AB	3	12	0,15	0,6	10	0,65
B	5	17	0,25	0,85	7	0,4
TB	3	20	0,15	1	3	0,15
Total	20		1			

$$N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$$

$$N_i^d = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k = \sum_{j=i}^{k} n_j$$

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

$$F_i^d = f_i + f_{i+1} + \ldots + f_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$$

1.2 Cas d'un caractère quantitatif

A- Variable discrète

Soit X un caractère qui désigne le nombre d'enfants par ménage pour les 20 agriculteurs. Les 7 valeurs possibles de ce caractère sont:

$$\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5, x_7 = 6\}$$

Alors le tableau statistique de ce caractère est :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	2	1	4	1	3	5	4	6	3	1	4	2	0	5	0	4	1	2	4

Alors la distribution de ce caractère est:

$$\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_6, n_6)\} = \{(0,2), (1,4), (2,3), (3,2), (4,5), (5,3), (6,1)\}$$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau statistique de ce caractère est:

i	Modalité x_i	Effectif n_i	Effectif Cumulé Croissant N_i	Fréquence f_i	Fréquence Cumulé Croissante F_i
1	0	2	2	0,1	0,1
2	1	4	6	0,2	0,3
3	2	3	9	0,15	0,45
4	3	2	11	0,1	0,55
5	4	5	16	0,25	0,8
6	5	3	19	0,15	0,95
7	6	1	20	0,05	1
	Total N = 20	20		1	

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

$$N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$$

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau statistique de ce caractère est:

i	Modalité x_i	Effectif n_i	Effectif Cumulé Décroissant N_i^d	Fréquence f_i	Fréquence Cumulé Décroissante F_i^d
1	0	2	20	0,1	1
2	1	4	18	0,2	0,9
3	2	3	14	0,15	0,7
4	3	2	11	0,1	0,55
5	4	5	9	0,25	0,45
6	5	3	4	0,15	0,2
7	6	1	1	0,05	0,05
	Total N = 20	20		1	

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

$$N_i^d = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k = \sum_{j=i}^{k} n_j$$

$$F_i^d = f_i + f_{i+1} + \ldots + f_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau complet de la distribution de ce caractère est:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	N_i^d	F_i^d
0	2	2	0,1	0,1	20	1
1	4	6	0,2	0,3	18	0,9
2	3	9	0,15	0,45	14	0,7
3	2	11	0,1	0,55	11	0,55
4	5	16	0,25	0,8	9	0,45
5	3	19	0,15	0,95	4	0,2
6	1	20	0,05	1	1	0,05
Total	20		1			

$$N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$$

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

$$N_i^d = n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k = \sum_{j=i}^{k} n_j$$

$$F_i^d = f_i + f_{i+1} + \ldots + f_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$$

1.2 Cas d'un caractère quantitatif

B- Variable continue

Soit X un caractère continu dont les n modalités peuvent être regroupées en plusieurs classes $[e_{i-1}, e_i[$, $1 \leq i \leq n$.

Soit k le nombre de classes du caractère continu. Ce nombre est déterminé par la formule Sturges suivante:

$$k = 1 + 3.22 \log(n)$$

Dans la pratique on prend un entier très proche de k.

Ainsi on a:

- $E = x_{\max} - x_{\min}$: est l'étendue de la série statistique.
- $e = \frac{E}{k}$: est l'étendu de la classe

où $x_{\max}$ et $x_{\min}$ étant la valeur maximale et la valeur minimale prises par X.

Alors:

$e_0 = x_{\min}$ $\quad e_1 = x_{\min} + e$ $\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$ $\quad e_k = x_{\min} + ke$

Donc:

$\underbrace{[e_0, e_1[}_{1^{ére}\ classe}$ $\quad \underbrace{[e_1, e_2[}_{2^{éme}\ classe}$ $\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$ $\quad \underbrace{[e_{k-1}, e_k[}_{k^{éme}\ classe}$

I. Tableaux Statistiques

Le tableau statistique relatif à la variable continue peut être représenté comme suit:

N° de classe	Classes	n_i	f_i
1	$[e_0, e_1[$	n_1	f_1
2	$[e_1, e_2[$	n_2	f_2
.	.	.	.
i	$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	f_i
.	.	.	.
k	$[e_{k-1}, e_k[$	n_k	f_k
Total	-	N	1

Exemple:

Considérons les données suivantes qui désignent les tailles de 20 étudiants:

1,73 1,82 1,87 1,75 1,68 1,64 1,88 1,86 1,89 1,59 **1,5**

1,67 1,81 1,76 1,72 1,65 1,79 1,89 1,81 **1,9**

L'application de la formule Sturges donne:

$$k = 1 + 3.22 \log(20) \approx 5$$

L'étendu de chaque classe est donné par:

$$e = \frac{E}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{1.9 - 1.5}{5} = 0.08$$

Alors:

$e_0 = 1.5$

$e_1 = 1.5 + 0.08 = 1.58$

$e_2 = 1.5 + 2 \times 0.08 = 1.66$

$e_3 = 1.5 + 3 \times 0.08 = 1.74$

$e_4 = 1.5 + 4 \times 0.08 = 1.82$

$e_5 = 1.5 + 5 \times 0.08 = 1.90$

Donc :

$\underbrace{[1.5, 1.58[}_{1^{ére}\ classe}$

$\underbrace{[1.58, 1.66[}_{2^{éme}\ classe}$

$\underbrace{[1.66, 1.74[}_{3^{éme}\ classe}$

$\underbrace{[1.74, 1.82[}_{4^{éme}\ classe}$

$\underbrace{[1.82, 1.9]}_{5^{éme}\ classe}$

I. Tableaux Statistiques

Soit la série statistique de la variable suivante:

1,73 1,82 1,9 1,75 1,68 1,64 1,88 1,86 1,89 1,59 **1,5** 1,67

1,81 1,76 1,72 1,65 1,79 1,89 1,81 **1,9**

Le tableau statistique relatif à cette variable est:

N° de classe	Classes	n_i	f_i
1	[1.5,1.58 [	1	0.05
2	[1.58,1.66[	3	0.15
3	[1.66,1.74[	4	0.2
4	[1.74,1.82[	4	0.2
5	[1.82,1.90]	8	0.4
Total	-	**20**	**1**

I. Tableaux Statistiques

Soit X une variable qui désigne « **Le Revenu**» des agriculteurs qui est supposée continue. On a:

Revenu X	1200	1500	2000	2500	3000	4000	5000	5300	6500
Effectif n_i	1	3	2	3	3	3	1	2	2

Regroupant les revenus en 4 classes de même amplitude comme indiqué par le tableau suivant. Alors on a :

Classes (10^2)	**n_i**	**N_i**	**N_i^d**	**f_i**	**F_i**	**F_i^d**
[0,20[	4	4	20	0,2	0,2	1
[20,40[	8	12	16	0,4	0,6	0,8
[40,60[	6	18	8	0,3	0,9	0,4
[60,80[	2	20	2	0,1	1	0,1
Total	20			1		

II. Représentations Graphiques

Le graphique est une traduction visuelle de l'information représenté par un caractère.

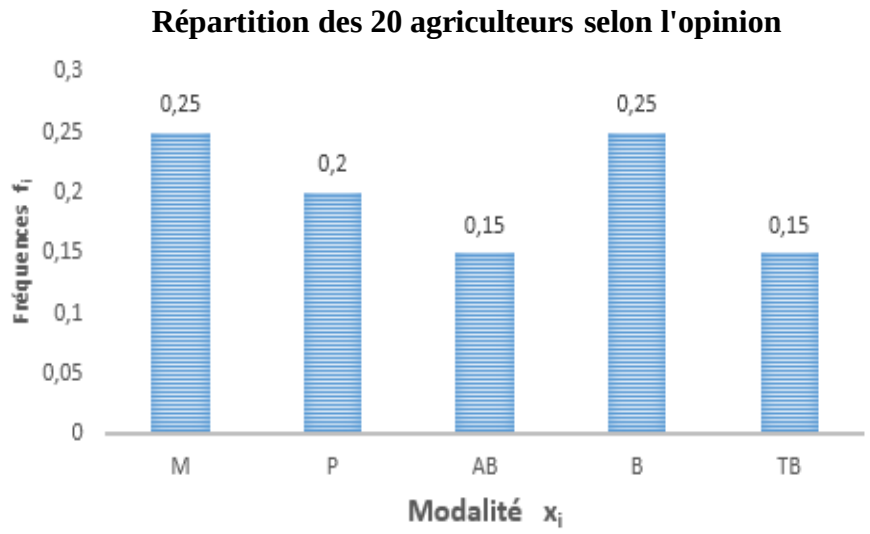
1. Cas du caractère qualitatif

1.1 Diagramme en barre

Ce diagramme est formé de rectangles d'hauteurs proportionnelles aux effectifs (ou fréquences) des modalités associées.

Ces rectangles ont les mêmes bases et sont constants.

Modalité x_i	n_i	f_i
M	5	0,25
P	4	0,2
AB	3	0,15
B	4	0,25
TB	3	0,15



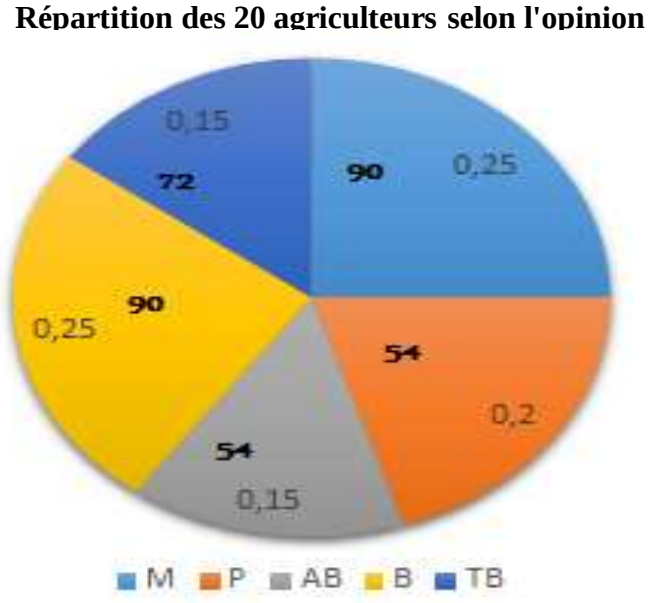
1.2 Diagrammes circulaires

Ce diagramme est formé de disque dont les secteurs sont proportionnels aux effectifs n_i (ou fréquences f_i) des modalités associées.

En terme d'angle, on associe à chaque modalité x_i l'angle θ_i du secteur i tel que:

$$\theta_i = \frac{360^\circ \times n_i}{n} = f_i \times 360^\circ$$

Modalité x_i	ni	fi	θ_i
M	5	0,25	90
P	4	0,2	72
AB	3	0,15	54
B	4	0,25	90
TB	3	0,15	54



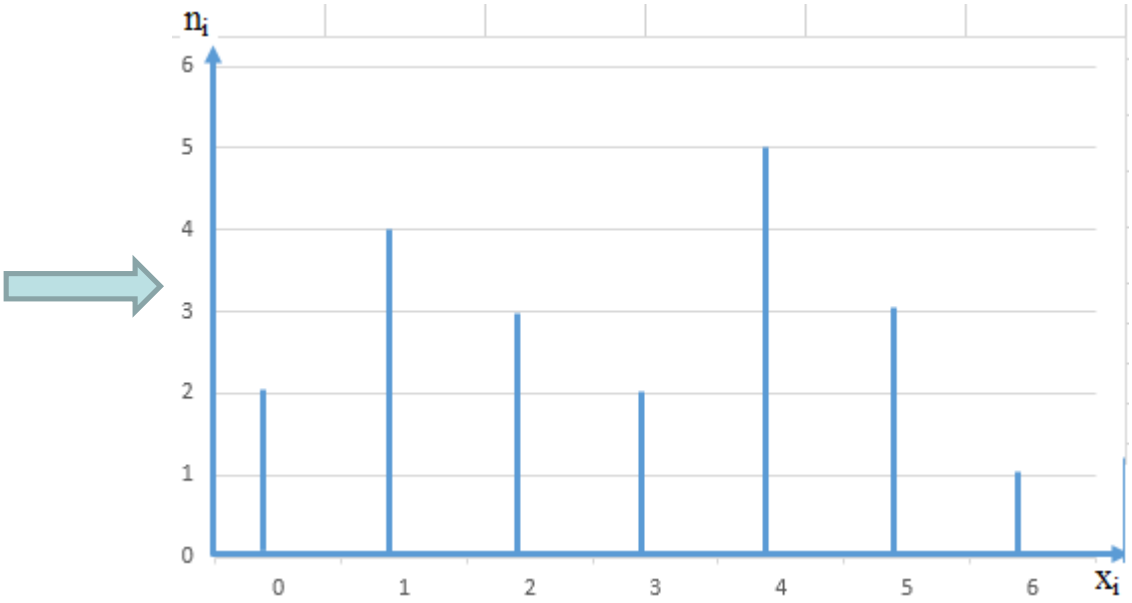
2. Cas du caractère quantitatif

2.1 Variable discrète

A) Diagramme en bâtons

Ce diagramme est formé de segments dont chaque modalité x_i est associée à un segment d'hauteur h_i proportionnel à l'effectif n_i ou à la fréquence f_i.

Modalité x_i	n_i	f_i
0	2	0,1
1	4	0,2
2	3	0,15
3	2	0,1
4	5	0,25
5	3	0,15
6	1	0,05



C. Diagramme cumulatif

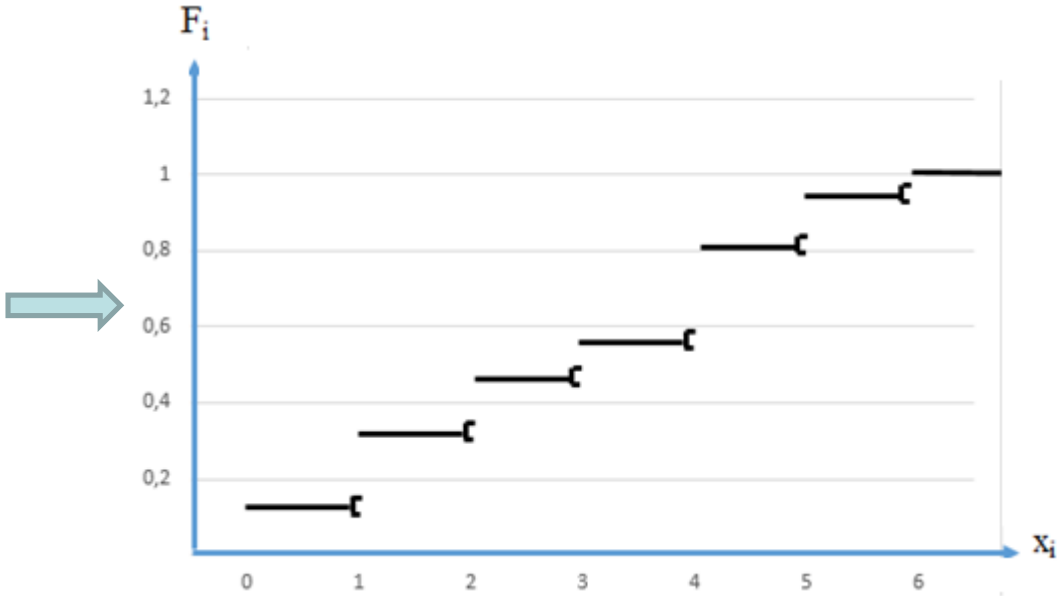
Ce diagramme est formé des paliers qui sont horizontaux et les fréquences cumulées croissantes F(x) qui sont constantes sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i[$ tel que:

$$x < x_1 \Rightarrow F(x) = 0 \qquad x \geq x_n \Rightarrow F(x) = 1$$

et

$$x = x_i \Rightarrow F(x) = F_i = f_1 + \ldots + f_i \qquad x_i \leq x < x_{i+1} \Rightarrow F(x) = F_i$$

Modalité x_i	n_i	f_i	F_i
0	2	0,1	0,1
1	4	0,2	0,3
2	3	0,15	0,45
3	2	0,1	0,55
4	5	0,25	0,8
5	3	0,15	0,95
6	1	0,05	1



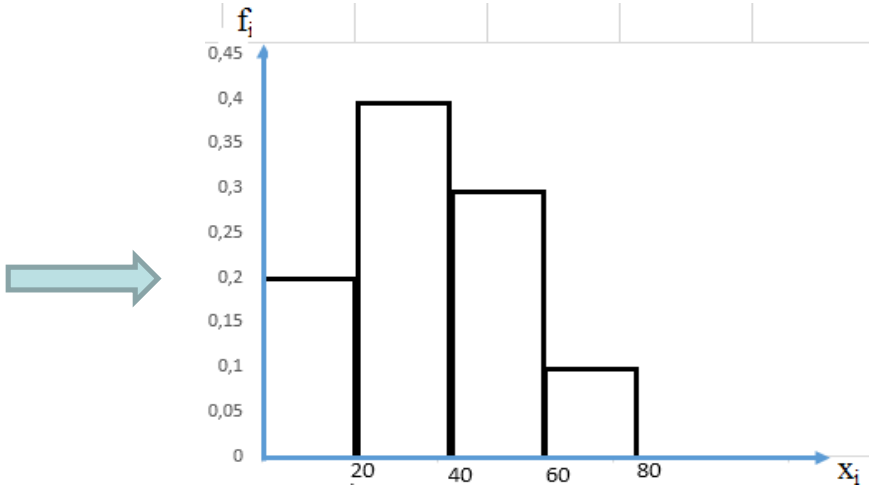
2.2 Variable continue

A) Histogramme : C'est un diagramme formé de rectangles composés chacun d'une base égale à l'amplitude d'une classe et d'aire proportionnelle à l'effectif (ou fréquence), c'est-à-dire: $S_i = n_i \times a_i$ ou $S_i = f_i \times a_i$

- Cas de classes à amplitude égales

Dans ce cas, l'effectif (fréquence) de la classe i, noté n_i (noté f_i), est le nombre (proportion) d'individus dont la modalité est comprise entre a_i et a_{i+1}.

Classes	Amplitude	n_i	f_i
[0,20[	20	4	0,2
[20,40[	20	8	0,4
[40,60[	20	6	0,3
[60,80[	20	2	0,1

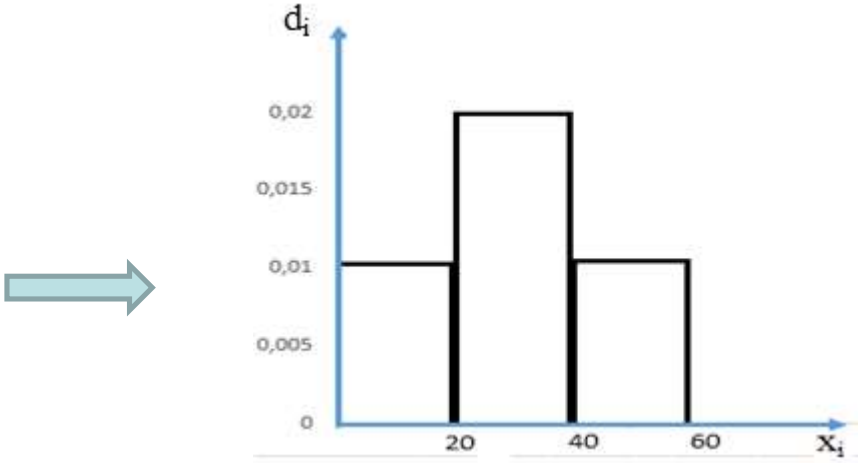


- Classes à amplitude inégales

Lorsque les amplitudes sont inégales, il faut effectuer une correction des effectifs (ou fréquences) d'une classe d'effectif n_i et d'amplitude a_i.

- L' effectif corrigé, noté nc_i, est: $nc_i = \frac{n_i}{a_i}$
- La fréquence corrigée (ou densité de fréquence) ,notée d_i, est : $d_i = \frac{f_i}{a_i}$
- La hauteur de chaque rectangle de l'histogramme est proportionnelle à effectif corrigé (fréquence corrigée). Si en regroupant les deux dernières classes, alors on obtient:

Classes	Amplitude	f_i	d_i
[0,20[	20	0,2	0,01
[20,40[	20	0,4	0,02
[40,80[	40	0,4	0,01

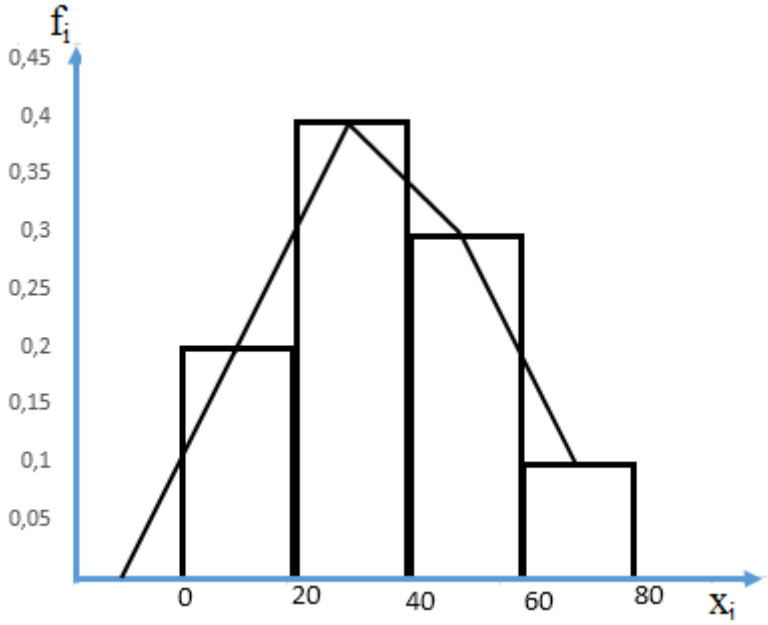


B. Polygone de fréquences

Ce diagramme est formé en joignant ,par des segments de droites, les milieux des sommets de chaque rectangle de l'histogramme.

Ainsi, il doit commencer par 0 et se terminer par 0.

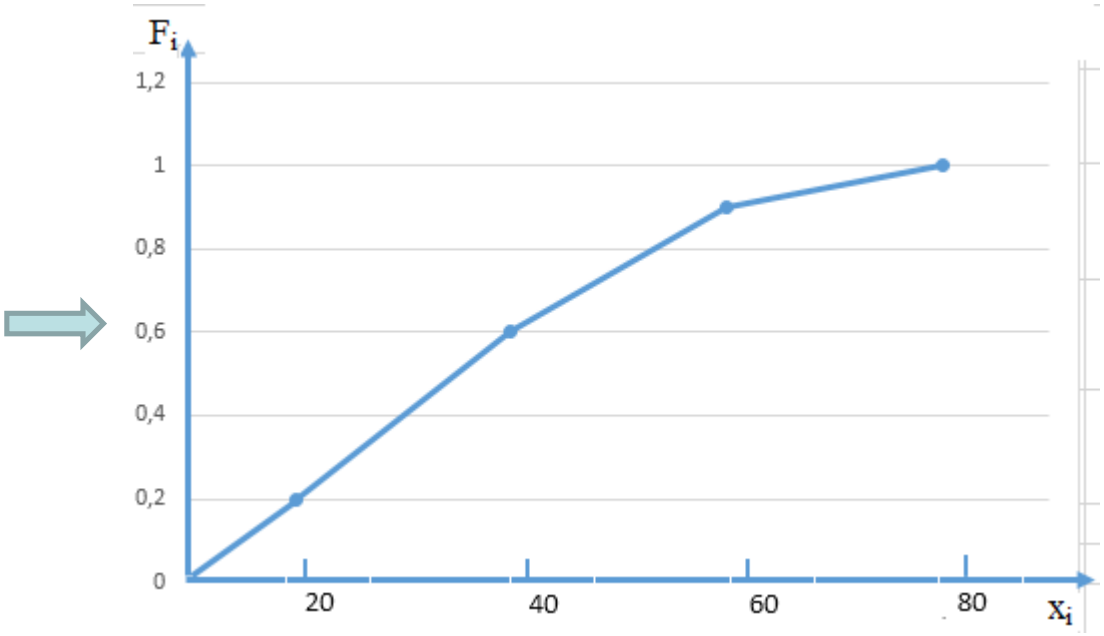
Classes	n_i	f_i
[0,20[	4	0,2
[20,40[	8	0,4
[40,60[	6	0,3
[60,80[	2	0,1



C. Diagramme cumulatif

Ce diagramme est formé en joignant les points de coordonnées (x_i , F_i) pour chaque classe $[x_{i-1}$, $x_i[$ où F_i est la fréquence cumulée de cette classe.

Classes	n_i	f_i	F_i
[0,20[	4	0,2	0,2
[20,40[	8	0,4	0,6
[40,60[	6	0,3	0,9
[60,80[	2	0,1	1



III. Applications Informatiques

Chapitre 3

Caractéristiques de Tendance Centrale

I. Moyennes

1. La moyenne arithmétique

1.1 La moyenne arithmétique simple

La moyenne arithmétique simple , notée $\overline{x}$, d'une série statistique est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemple :

Soit la série statistique {10, 25, 20,25}, alors :

$$\bar{x} = \frac{10 + 25 + 20 + 25}{4} = 20$$

1.2 La moyenne arithmétique pondérée

La moyenne arithmétique pondérée d'une variable statistique X de distribution $\{(x_i, n_i)_{1\le i\le k}\}$ est donnée par :

- **Cas d'une variable quantitative discrète :**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i$$

- **Cas d'une variable quantitative continue:**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \times c_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \times x_i$$

où $c_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ désigne le centre de la classe $[x_i, x_{i+1}]$

I. Moyennes

Exemple : **Cas d'une variable quantitative discrète**

On reprend le tableau de nombre des enfants des agriculteurs

Modalité x_i	n_i	$x_i n_i$	f_i	$x_i f_i$
0	2	0	0,1	0
1	4	4	0,2	0,8
2	3	6	0,15	0,45
3	2	6	0,1	0,2
4	5	20	0,25	1,25
5	3	15	0,15	0,45
6	1	6	0,05	0,05
Total	20	57	1	2,85

Alors : $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{57}{20} = 2.85$$

I. Moyennes

Exemple : Cas d'une variable quantitative continue

On reprend le tableau des revenus des agriculteurs

Classes	c_i	n_i	$c_i n_i$	f_i	$c_i f_i$
[0,20[	10	4	40	0,2	2
[20,40[	30	8	240	0,4	12
[40,60[	50	6	300	0,3	15
[60,80[	70	2	140	0,1	7
Total		20		1	36

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i c_i}{n} = \sum_{i=1}^{4} f_i c_i = \frac{720}{20} = 36$$

2. Moyenne Géométrique

La moyenne géométrique est utilisée dans le calcul du taux d'accroissement moyen et de certains indices statistiques.

La moyenne géométrique, notée G, d'une variable statistique X de distribution $\left\{\left(x_i, n_i\right)_{1\le i\le k}\right\}$ est donnée par :

$$G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \times \ldots \times x_k^{n_k}} \qquad \text{où} \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Dans la pratique on utilise le logarithme pour calculer G. En effet:

$$\log(G) = \log\left(\left[x_1^{n_1} \times \ldots \times x_k^{n_k}\right]^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\log\left(x_i^{n_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \log\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i \log\left(x_i\right)$$

Donc $\log(G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \log(x_i) = \sum_{i=1}^{k} f_i \log(x_i)$

Exemple: Soit X une variable statistique de distribution

Modalité x_i	n_i	n_i Log(x_i)
1	2	0
3	1	0,47
4	2	1,2
5	3	1,39
Total	8	0,38

La moyenne géométrique de X est :

$$\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \log(x_i) = \frac{1}{10}\left[2\times\log(1)+1\times\log(3)+2\times\log(4)+3\times\log(5)\right]$$

$$\log G = 0.38 \Rightarrow G = e^{0.38}$$

2. Moyenne harmonique

La moyenne harmonique est utilisée dans le calcul des études du pouvoir d'achat, des durées moyennes, des moyennes de rapports et de pourcentages.

La moyenne harmonique, notée H, d'une variable statistique X de distribution $\left\{\left(x_i, n_i\right)_{1\le i\le k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}} \qquad \text{où} \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

I. Moyennes

Exemple: Soit X une variable statistique de distribution

Modalité x_i	n_i	$\frac{n_i}{x_i}$
1	2	2
3	1	0,33
4	2	0,5
5	3	0,6
Total	8	3,43

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{x_i}}$$

La moyenne harmonique de X est :

$$H = \frac{1}{\frac{1}{8}\left(2\times\frac{1}{1}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{5}\right)} = 2,33$$

$$H = \frac{8}{\left(2+0.3+0.5+0.6\right)} = 2,33$$

2. Moyenne quadratique

La moyenne quadratique est utilisée dans le calcul de certains paramètres de dispersion.

La moyenne quadratique, notée Q, d'une variable statistique X de distribution $\left\{\left(x_i, n_i\right)_{1\le i\le k}\right\}$ est donnée par :

$$Q=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2} \qquad \text{où} \qquad n=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

I. Moyennes

Exemple: Soit X une variable statistique de distribution

Modalité x_i	n_i	$n_i x_i^2$
1	2	2
3	1	9
4	2	32
5	3	75
Total	8	118

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}$$

La moyenne quadratique de X est :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{8}\left(2\times 1^2 + 1\times 3^2 + 2\times 4^2 + 3\times 5^2\right)}$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{8}\left(2+9+32+75\right)} = 3.84$$

I. Moyennes

- La moyenne arithmétique est très sensible aux valeurs extrêmes de la série alors que la moyenne géométrique est peu sensible à ces dernières.

- La moyenne harmonique est plus sensible aux plus petites valeurs de la série qu'aux plus grandes.

- Pour la même série statistique on a :

$$H < G < \bar{x} < Q$$

II. Mode

Le mode, noté M_o, d'une série statistique est la valeur qui représente le plus grand effectif ou la fréquence la plus élevée de cette série.

Remarque:

- Le mode n'est pas nécessairement unique et n'existe pas forcément.
- Pour une variable continue, la classe contenant l'effectif le plus élevé est dite classe modale.

Détermination du mode

1. Variable statistique qualitative

Considère la variable X qui désigne " La Couleur préféré" de tableau statistique suivant :

X_i	Vert	Rouge	Jaune	Rose
n_i	18	14	4	4

II. Mode

Le mode M_o est «Vert » car l'effectif associé à ce mode est égal à 18

2.Variable statistique quantitative discrète

- Soit la série suivante : {5; 7; 6; 7; 3; 1}.

  La valeur la plus fréquentée est 7. Donc le mode M_o est égale à 7.

  Dans ce cas on dit qu'il s'agit d'une distribution unimodale

- Soit la série suivante : {5; 4; 6; 4; 3; 1;3}.

  Les valeurs 3 et 4 sont les valeurs les plus fréquentées .

  Dons cette série on a deux modes qui sont 3 et 4.

  Dans ce cas on dit qu'il s'agit d'une distribution binomodale

3. Variable statistique quantitative continue

- Cas d'amplitudes égales

Soit le tableau des données suivantes:

Classes	n_i	Amplitude
[0,20[	4	20
[20,40[	8	20
[40,60[	6	20
[60,80[	2	20

La classe modale est : [20-40[

Pour calculer ce mode il faut appliquer la formule suivante:

$$M_0 = x_1 + \frac{k_1}{k_1 + k_2}(x_2 - x_1)$$

II. Mode

où :

- $[x_1, x_2[= [20 , 40[$: Classe modale (**CM**).
- L'effectif de la classe modale est égal à 8
- L'effectif de la classe précédente de la **CM** est égal à 4
- L'effectif de la classe suivante de la **CM** est égal à 6
- $k_1 = 8- 4 = 4$: la différence entre l'effectif de la classe modale et de la classe précédente de la **CM** .
- $k_2 = 8- 6 = 2$: la différence entre la fréquence (ou l'effectif) de la classe modale et de la classe suivante de la **CM**.

Donc :

$$M_0 = 20 + \frac{4}{4+2}(40-20) \approx 33,33$$

II. Mode

- Cas d'amplitude inégales

Soit le tableau des données suivantes:

Classes	n_i	f_i	Amplitude	Densité en %
[6,9[	7	0,467	3	15,6
[9,11[	5	0,333	2	16,7
[11,14[	3	0,2	3	6,7

La classe modale c'est la classe ayant l'effectif corrigé (ou la densité) le(a) plus élevé(e). Donc la classe modale est [9-11[

II. Mode

où :

- $[x_1, x_2[= [9 , 11[$: Classe modale (**CM**).
- La densité de la classe modale est égal à 16,7
- La densité de la classe précédente de la **CM** est égal à 15,6
- La densité de la classe suivante de la **CM** est égal à 6,7
- $k_1 = 16,7 - 15,6 = 1,1$: la différence entre la densité de la classe modale et celle de la classe précédente de la **CM** .
- $k_2 = 16,7 - 6,7 = 10$: la différence entre la densité de la classe modale et de celle de la classe suivante de la **CM**.

Donc :

$$M_0 = 9 + \frac{1,1}{1,1+10}(11-9) = 9,2$$

III. Médiane

La médiane, notée M_e, d'une série statistique est la valeur qui partage cette série en deux parties d'effectifs égaux.

Détermination de la médiane:

- Cas d'une série brute:

Soit une série de *n* observations ordonnées par ordre croissant: $x_1, \ldots, x_n$

(a) <u>n est un nombre impair</u>

la valeur médiane est l'observation qui occupe le rang (n+1)/2 .

Exemple 1 : 16 12 1 9 17 19 13 10 4

On ordonne cette série par ordre croissant: 1 4 9 10 **12** 13 16 17 19

La valeur médiane est 12

III. Médiane

(b) <u>n est un nombre pair</u>

On arrondit le décimal $n/2$ à l'entier supérieur .

La valeur médiane est l'observation qui occupe le rang $n/2$.

Exemple 1 : 16 12 1 9 17 19 18 10 3 7 2 11 15 14

On ordonne cette série par ordre croissant:

1 2 3 7 9 10 **12** **11** 14 15 16 17 18 19

La valeur médiane est 11

III. Médiane

- Cas d'une distribution :

(a) Variable statistique discrète

Soit X une variable statistique de distribution $\left\{\left(x_i, f_i\right)_{1\le i\le k}\right\}$. On utilise les fréquences cumulées croissantes pour déterminer la médiane de X.

- Dans le cas où $F_i = 0.5$, la modalité x_i correspond à cette fréquence cumulée.
- Dans le cas contraire, la médiane est la modalité x_i qui correspond à la plus petite fréquence cumulée dépassant strictement 0.5.

III. Médiane

Exemple

Modalité x_i	n_i	f_i	F_i
0	2	0,1	0,1
1	4	0,2	0,3
2	3	0,15	0,45
3	2	0,1	0,55
4	5	0,25	0,8
5	3	0,15	0,95
6	1	0,05	1

La valeur médiane est égale à 3

III. Médiane

(b) Variable statistique continue

Dans un premier temps on détermine la classe [x_{i-1}, x_i [contenant la médiane M_e telle que $F_{i-1} \leq 0.5 < F_i$, puis on détermine M_e en utilisant l'équation suivante:

$$M_e = x_{i-1} + a_i \times \frac{0.5 - F_{i-1}}{f_i}$$

- [x_{i-1}, x_i [: Classe médiane (CM) (classe qui contient la médiane)
- a_i: Amplitude de la classe médiane
- f_i: Fréquence de la classe médiane
- F_{i-1}:Fréquence cumulée de la classe précédente de la CM

III. Médiane

Exemple :

Classes	c_i	n_i	f_i	F_i	Amplitude
[0,20[	10	4	0,2	0,2	20
[20,40[	30	8	0,4	0,6	20
[40,60[	50	6	0,3	0,9	20
[60,80[	70	2	0,1	1	20

- [20, 40 [: Classe médiane (CM)
- 20: Amplitude de la classe médiane
- 0,4: Fréquence de la classe médiane
- 0,2:Fréquence cumulée de la classe précédente de la CM

$$M_e = x_{i-1} + a_i \times \frac{0.5 - F_{i-1}}{f_i} \quad \Rightarrow \quad M_e = 20 + 20 \times \frac{0.5 - 0.2}{0.4} = 35$$

III. Médiane

Cas de classe de d'amplitude inégale

Chapitre 3

Caractéristiques de dispersion et de concentration

1. Les écarts simples

1. L'étendue:

L'étendue , notée ***e***, d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de celle-ci.

$$e = x_{max} - x_{min}$$

Exemples :

Cas 1: Variable statistique discrète (nombre d'enfants par ménage**)**

$e = x_7 - x_1 = 6 - 0 = 6$ enfants

Cas 2: Variable statistique continue (Revenu de l'agriculteur**)**

$e = x_6 - x_1 = 80 - 0 = 80$

2. Ecart interquantile

- **Quartiles** :

  Ils partagent une série statistique en 4 groupes égaux, chacun représentant 25% des observations.

- **Déciles** :

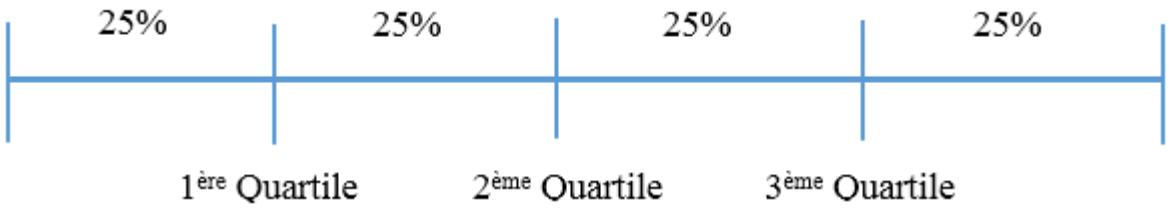
  Ils partagent une série statistique en 10 groupes égaux, chacun représentant 10% des observations.

- **Centiles** :

  Ils partagent une série statistique en 100 groupes égaux, chacun représentant 1% des observations.

1. Les écarts simples

Les quartiles correspondent aux observations pour lesquelles la fréquence cumulée croissante dépasse respectivement 25 %, 50 % et 75%



- **Le premier quartile**, noté Q_1, d'une série statistique est la plus petite valeur telle qu'au moins 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1.
- **Le deuxième quartile** d'une série statistique c'est la **médiane (**Q_2)
- **Le troisième quartile** , noté Q_3, d'une série statistique est la plus petite valeur telle qu'au moins 75% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3.

Détermination des quartiles:

- Cas d'une série brute:

Soit une série statistique de *n* observations et k un nombre tel que $k = \frac{n}{4}$

Cas 1 : k est un entier

les valeurs des quartiles Q_1 et $Q_{3,}$ sont déterminées comme suit:

a. Les valeurs sont rangées par ordre croissant.

b. Q_1 est la valeur de la modalité correspondant au 1x k^{ieme} rang

c. Q_3 est la valeur de la modalité correspondant au 3xk^{ieme} rang.

1. Les écarts simples

Exemple 1 : Considérons la série statistique suivante :

17 13 7 27 29 12 19 14 16 1 18 4 8 21 20 11

On range les valeurs de la série par ordre croissant, on obtient:

1 4 7 8 11 12 13 14 16 17 18 19 20 21 27 29

- **Le premier quartile** est le $k^{éme} = \frac{16}{4} = 4^{éme}$ rang , c'est-à-dire $Q_1 = 8$

- **Le troisième quartile** est le $3 \times k^{éme} = 3 \times \frac{16}{4} = 3 \times 4 = 12^{éme}$ rang , c'est-à-dire $Q_3 = 19$

1. Les écarts simples

Cas 1 : k n'est pas un entier

les valeurs des quartiles Q_1 et $Q_{3,}$ sont déterminées comme suit:

a. Les valeurs sont rangées par ordre croissant.

b. On arrondit le décimal $1 \times k$ à l'entier supérieur .

Q_1 est la valeur de la modalité correspondant au rang de cet entier.

c. On arrondit le décimal $3 \times k$ à l'entier supérieur.

Q_3 est la valeur de la modalité correspondant au rang de cet entier

1. Les écarts simples

Exemple: considérons les valeurs rangées par ordre croissant comme suit:

3 4 5 6 7 8 9 10 12 13 15 16 17 19 21 22 23 24 25 27 28 29 39

On a $n = 23 \Rightarrow k = \frac{n}{4} = 5.75$ et $3 \times \frac{n}{4} = 17.25$

Donc :

- **Le premier quartile** est le $6^{ème}$ rang , c'est-à-dire $Q_1 = 8$
- **Le deuxième quartile** est le $12^{ème}$ rang , c'est-à-dire $Q_2 = 16$
- **Le troisième quartile** est le $18^{ème}$ rang , c'est-à-dire $Q_3 = 24$

- Cas d'une distribution :

(b) Variable statistique continue

Dans un premier temps on détermine la classe [x_{i-1}, x_i [contenant le quartile Q_k , $k \in \{1,3\}$, qui correspond à la plus petite fréquence cumulée dépassant strictement $\alpha_k \in \{0.25, 0.75\}$ puis on détermine Q_k en utilisant l'équation suivante:

$$Q_k = x_{i-1} + a_i \times \frac{\alpha_k - F_{i-1}}{f_i} \qquad \alpha_1 = 0.25 \text{ et } \alpha_3 = 0.75$$

- [x_{i-1}, x_i [: Classe qui contient le quartile en question (CQ)
- a_i: Amplitude de la (CQ)
- f_i: Fréquence de la (CQ)
- F_{i-1}:Fréquence cumulé de la classe précédente de la (CQ)

1. Les écarts simples

Exemple : Revenus des agriculteurs

Classes	n_i	f_i	F_i	Amplitude a_i
[0,20[	4	0,2	0,2	20
[20,40[	8	0,4	0,6	20
[40,60[	6	0,3	0,9	20
[60,80[	2	0,1	1	20

$$Q_k = x_{i-1} + a_i \times \frac{\alpha_k - F_{i-1}}{f_i}$$

$$\alpha_1 = 0.25 \text{ et } \alpha_3 = 0.75$$

Q_1	Q_3
- On a $\alpha_1 = 0.25$ ($F_0 \leq 0.25 < F_1$)	- On a $\alpha_3 = 0.75$ ($F_2 \leq 0.75 < F_3$)
- La classe de Q_1 est [20,40[	- La classe de Q_3 est [40,60[
- $f_i = 0,4$	- $f_i = 0,3$
- $F_{i-1} = 0,2$	- $F_{i-1} = 0,6$
- $Q_1 = 20 + 20 \times \frac{0.25 - 0.2}{0.4} = 22.5$	- $Q_3 = 40 + 20 \times \frac{0.75 - 0.6}{0.3} = 50$

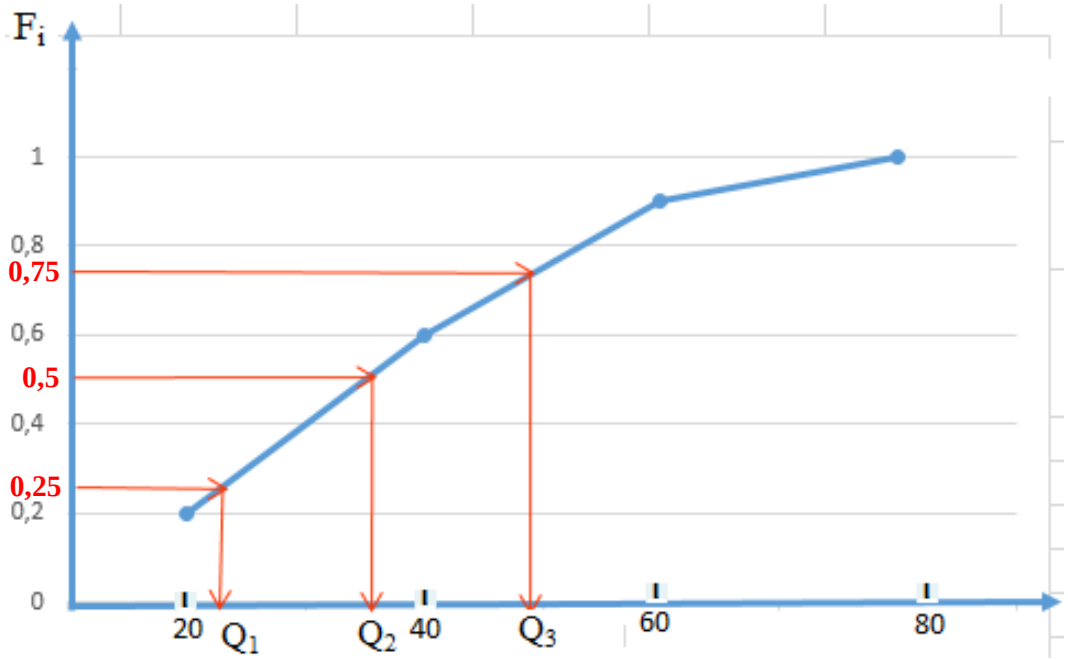
III. Médiane

Cas de classe de d'amplitude inégale

1. Les écarts simples

[Q1; Q3] est **l'intervalle interquartile**, il contient à peu prés 50% des valeurs de la série.

On trace le diagramme cumulé et on trouve les quartiles graphiquement comme suit :



II. Variance et Ecart-type

1. Variance

Elle mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Plus les valeurs sont regroupées autour de la moyenne, plus la variance est petite. Plus elles sont dispersées, plus la variance est grande.

La variance, notée V(X), d'une variable statistique de distribution $\left\{\left(x_i, n_i\right)_{1\le i\le k}\right\}$ est donnée par:

$$V\left(X\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^2-\overline{x}^2$$

2. Ecart-type

L'écart type de X, noté σ_X , est la racine carrée de la variance.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Remarque:

- Pour une variable statistique continue, les x_i désignent les centres des classes.
- Dans le cas d'une série brute, la variance de cette série est égale à :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - \bar{x}^2$$

Exemple 1 : Série brute

Considérons la série suivante: {11,14,24,8, 32,9,10,17}.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{11+14+24+8+32+9+10+17}{8} = 15,625$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(11-15,625)^2 + (14-15,625)^2 + \ldots + (17-15,625)^2}{8} \approx 62,225$$

ou

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{(11)^2 + (14)^2 + \ldots + (17)^2}{8} - (15,625)^2 \approx 62,225$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{62,225} = 7.88$$

II. Variance et Ecart-type

Exemple 2: Distribution d'une variable discrète

Nombre d'enfants des agriculteurs

Modalité x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i X_i^2$
0	2		0	0
1	4		1	4
2	3		4	12
3	2		9	18
4	5		16	80
5	3		25	75
6	1		36	36
Total	20		57	225

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x^2 - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{(0\times 2)+(1\times 4)+(2\times 3)+\ldots+(6\times 1)}{20}$$

$$= 2.85$$

$$V(x) = \frac{1}{20}(0+4+12+\ldots+36) - (2.85)^2$$

$$= 3.1275$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3.1275} = 1.76$$

II. Variance et Ecart-type

Exemple 3: Distribution d'une variable continue

Revenus des agriculteurs répartis en classes

Revenus	c_i	n_i	$c_i n_i$	$(c_i)^2 n_i$
[0,20[	10	4	40	400
[20,40[	30	8	240	7200
[40,60[	50	6	300	15000
[60,80[	70	2	140	9800
Total		20	720	32400

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i c^2 - \bar{c}^2$$

$$\bar{c} = \frac{720}{20} = 36$$

$$V(x) = \frac{32400}{20} - (36)^2$$

$$= 324$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{324} = 18$$

III. Coefficient de Variation

Le coefficient de variation, noté CV, d'une variable statistique de moyen $\bar{x}$ et d'écart-type σ_X est égal au rapport suivant:

$$CV = \frac{\sigma_X}{\bar{x}}$$

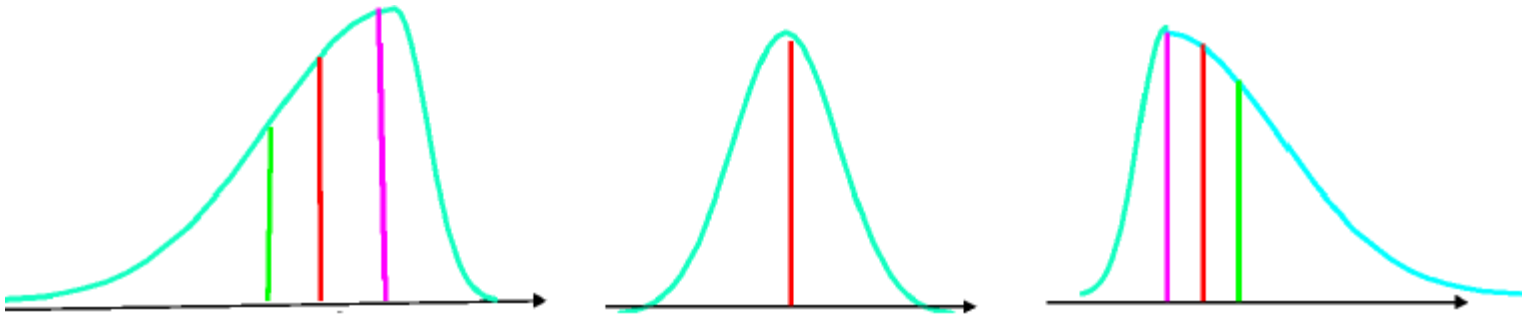
Lorsque deux séries (ou plusieurs) sont exprimées en unités différentes, l'analyse de la dispersion doit se faire par le biais du coefficient de variation

VI. Forme d'une distribution

La distribution est symétrique si son histogramme est approximativement symétrique par rapport à la droite passant par la médiane. Dans ce cas on a :

$$M_e = M_o = \bar{X}$$

Dans le cas contraire on parle d'une distribution symétrique à gauche si la moitié gauche de son histogramme est plus allongée que sa moitié droite, sinon on parle d'une distribution symétrique à droite



VI. Forme d'une distribution

Mesures de l'asymétrie

L'étude de l'asymétrie se fait à travers 3 coefficients qui sont:

- **Le coefficient de Yule:** $C_Y = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$

  Si $C_Y = 0$ alors la distribution est symétrique.

- **Le coefficient de Pearson:** $C_p = \dfrac{\bar{X} - M_o}{\sigma}$

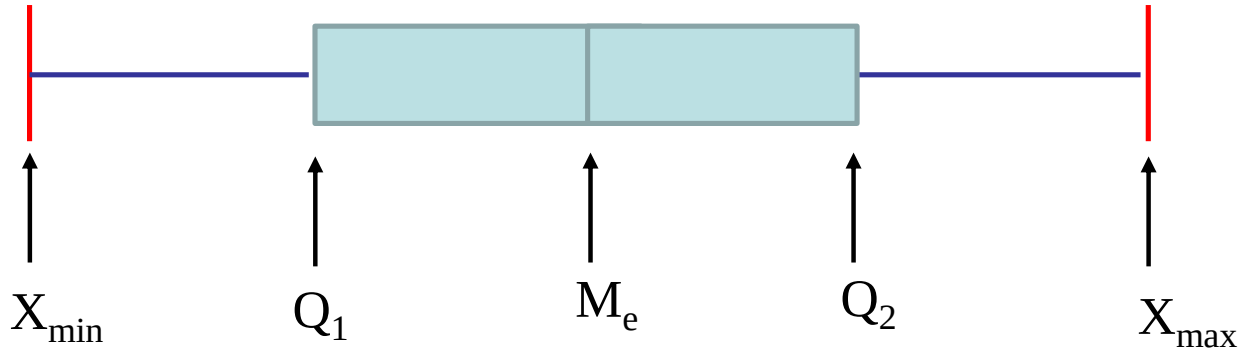
  Si $C_p = 0$ alors la distribution est symétrique.

- **Le coefficient de Fisher:** $C_F = \dfrac{m_3}{\sigma^3}$ où $m_3 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^3$

  Si $C_F = 0$ alors la distribution est symétrique.

V. Boite à Moustaches

C'est un graphique qui permet de représenter les valeurs extrêmes , la médiane, les quartiles Q_1 et Q_2 d'une série statistique, ce qui peut décrire les propriétés d'un échantillon comme la position, la variabilité et l'asymétrie.



1. Masse

Expliquer l’utilité de la masse

1. Masse

Soit X une variable continue dont les valeurs sont regroupées en k classes comme suit:

Classes	Centre x_i	Effectif n_i
$[e_0, e_1[$	x_1	n_1
$[e_1, e_2[$	x_2	n_2
.	.	.
$[e_{k-1}, e_k[$	x_k	n_k

La masse m_i et la masse relative q_i(la proportion de la masse totale) de la variable X dans la classe $[e_{i-1}, e_i[$ ou relative à x_i d'effectif n_i sont respectivement:

- $m_i = n_i x_i$
- $q_i = \dfrac{m_i}{m}$

où $m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ désigne la masse totale de X.

1. Masse

La masse cumulée M_i et la masse cumulée relative Q_i associée à la classe $[e_{i-1}, e_i[$ sont respectivement:

- $M_i = \sum_{k=1}^{i} n_k x_k$
- $Q_i = \frac{M_i}{\sum_{j=1}^{k} n_j x_j}$

Remarques :

i) On a , $0 \leq Q_i \leq 1$ pour tout i

ii) On a $Q_i = Q(e_i)$

1. Masse

Exemple :

Revenus des agriculteurs répartis en classes

Revenus	c_i	n_i	m_i	M_i	q_i	Q_i
[0,20[	10	4	40	40	0,056	0,056
[20,40[	30	8	240	280	0,333	0,389
[40,60[	50	6	300	580	0,417	0,805
[60,80[	70	2	140	720	0,195	1
Total		n = 20	m = 720			

- $m_i = n_i x_i$
- $q_i = \frac{m_i}{m}$
- $M_i = \sum_{k=1}^{i} n_k x_k$
- $Q_i = \frac{M_i}{\sum_{j=1}^{k} n_j x_j}$

2. Médiale

La Médiale, notée M_I, d'une série statistique est la valeur du caractère ou de la variable X qui partage la masse totale m de X en deux parties égales .

Remarque: $Q(M_I) = 0.5$

Soit X une variable statistique de distribution $\{(x_i, f_i)_{1 \le i \le k}\}$. On utilise les masses cumulées relatives pour déterminer la médiale de X.

Ainsi, la médiale est la modalité x_i qui correspond à la plus petite masse cumulée relative dépassant strictement 0.5.

2. Médiale

Détermination de la médiale

Dans un premier temps on détermine la classe [x_{i-1}, x_i [contenant la médiale M_I telle que $Q_{i-1} \leq 0.5 < Q_i$, puis on détermine M_I en utilisant l'équation suivante:

$$M_I = x_{i-1} + a_i \times \frac{0.5 - Q_{i-1}}{q_i}$$

- [x_{i-1}, x_i [: Classe contenant la médiale (CM_I)
- a_i: Amplitude de la classe CM_I
- q_i: Masse relative associée àla classe CM_I
- Q_{i-1}:Masse cumulée relativeassociée àla classe précédente de la CM_I

2. Médiale

Exemple : Revenus des agriculteurs répartis en classes

Revenus	c_i	n_i	m_i	q_i	Q_i
[0,20[	10	4	40	0,056	0,056
[20,40[	30	8	240	0,333	0,389
[40,60[	50	6	300	0,417	0,805
[60,80[	70	2	140	0,195	1
Total		n = 20	m = 720		

- [40, 60 [: Classe contenant la médiale (CM_I)
- 20: Amplitude de la classe CM_I
- 0,417: Masse relative associée àla classe CM_I
- 0,389:Masse cumulée relativeassociée àla classe précédente de la CM_I

$$M_I = x_{i-1} + a_i \times \frac{0.5 - Q_{i-1}}{q_i} \Rightarrow M_I = 40 + 20 \times \frac{0.5 - 0.389}{0.417} = 45.32$$

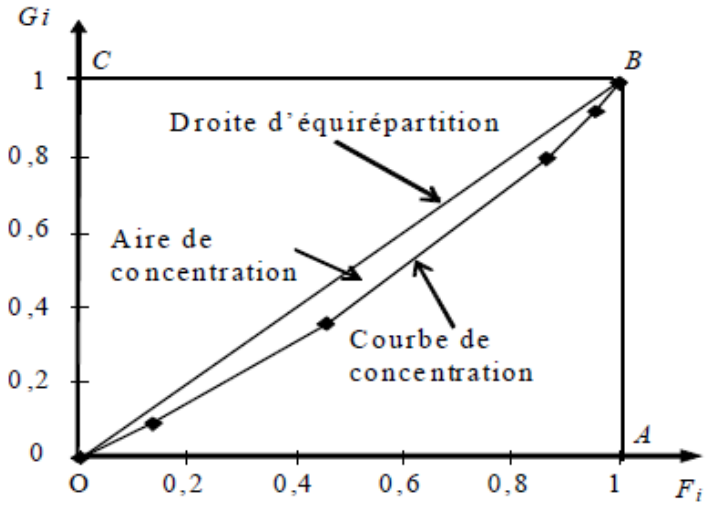
III. Courbe de concentration

La courbe de concentration ou courbe de Lorenz est obtenue en traçant les points de coordonnées (F_i , Q_i) en les joignant par des segments de droite dans un repère orthonormé.

On met la fréquence cumulée F_i sur l'axe des abscisses et la masse cumulée relative Q_i sur l'axe des ordonnées.

Enfin on trace la droite passant par l'origine d'équation $Q_i = F_i$.

Revoir cette courbe en utilisant les couples (Fi,Qi)



III. Courbe de concentration

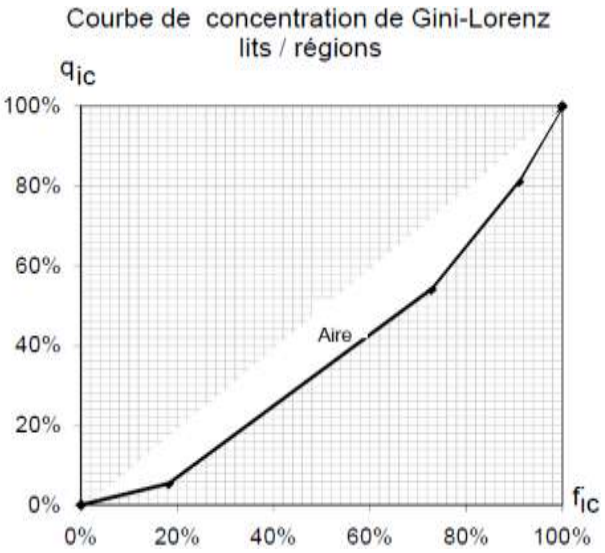
Exemple : Revenus des agriculteurs répartis en classes

Revenus	c_i	n_i	f_i	F_i	m_i	q_i	Q_i
[0,20[	10	4	0,2	0,2	40	0,056	0,056
[20,40[	30	8	0,4	0,6	240	0,333	0,389
[40,60[	50	6	0,3	0,9	300	0,417	0,805
[60,80[	70	2	0,1	1	140	0,195	1
Total		n = 20	1		m = 720		

Revoir cette courbe en utilisant les couples (Fi,Qi)

Les points de coordonnées (F_i , Q_i) sont :

(0.2, 0.056) ; (0.6, 0.389) ; (0.9, 0.805) ; (1, 1)



La courbe de concentration

Formule de calcul de l'indice de Gini

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i \left(Q_{i-1} + Q_i \right)$$

Revoir la définition de l'indice de Géni en expliquant son utilité

- f_i représente la fréquence cumulée à la i^{éme} classe.
- Q_i représente la masse cumulée à la i^{éme} classe.

Propriétés de l'indice de Gini

- $0 < G < 1$;
- Si G est proche de 1 alors il y a une forte concentration ;
- Si G est proche de 0 alors il y a une faible concentration.

La courbe de concentration

Exemple : Revenus des agriculteurs répartis en classes

Revenus	c_i	n_i	f_i	m_i	q_i	Qi	$S_i = Q_{i-1}+Q_i$	$f_i\ S_i$
[0,20[	10	4	0,2	40	0,056	0,056	0,056	0,0112
[20,40[	30	8	0,4	240	0,333	0,389	0,056 + 0,389 = 0,445	0,178
[40,60[	50	6	0,3	300	0,417	0,805	0,389 + 0,805 = 1,194	0,3582
[60,80[	70	2	0,1	140	0,195	1	0,805 + 1 =1,805	0,1805
Total		n = 20	1	m = 720			3,5	0,7279

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i S_i \quad \Rightarrow \quad G = 1 - 0.7279 = 0.2721$$

Chapitre 4

Séries doubles

I. Tableau de contingence

On veut étudier la répartition de 100 étudiants selon le nombre d'année d'obtention de la licence et la mention. Soient :

- X : Nombre d'année d'obtention de la licence
- Y : Mention de la licence

X\Y	Passable (P)	Assez Bien (AB)	Bien (B)	Très Bien (TB)	Marge de X
3	20	10	10	5	45
4	15	10	5	5	35
5	10	5	5	0	20
Marge de Y	45	25	20	10	**100**

I. Tableau de contingence

X\Y	Passable (P)	Assez Bien (AB)	Bien (B)	Très Bien (TB)	Marge de X
3	20	10	10	5	**45**
4	15	10	5	5	**35**
5	10	5	5	0	**20**
Marge de Y	45	25	20	10	**100**

1. La distribution marginale de la variable X est :

X	3	4	5
Marge de X $n_{i\bullet}$	**45**	**35**	**20**

Le nombre $n_{i\bullet}\ (i=1,2,3)$, est appelé la marge de X ou l'effectif marginal de X.

I. Tableau de contingence

X\Y	Passable (P)	Assez Bien (AB)	Bien (B)	Très Bien (TB)	Marge de X
3	20	10	10	5	45
4	15	10	5	5	35
5	10	5	5	0	20
Marge de Y	45	25	20	10	**100**

2. La distribution marginale de la variable Y est :

Y	P	AB	B	TB
Marge de Y $n_{\bullet j}$	45	25	20	10

Le nombre $n_{\bullet j}\ (j=1,2,3,4)$, est appelé la marge de Y ou l'effectif marginal de Y.

I. Tableau de contingence

Soient X et Y deux variables statistiques dont les valeurs sont:

- $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et
- $y_1, y_2, \ldots, y_k$

Les données de ces deux variables peuvent être regroupées dans un tableau dit tableau de contingence.

X\Y	y_1	y_2	…	y_k	**Marge de X** $n_{i\bullet}$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1k}	$n_{1\bullet}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2k}	$n_{2\bullet}$
…	…	…	…	…	…
x_m	n_{m1}	n_{m2}	…	n_{mk}	$n_{m\bullet}$
Marge de Y $n_{\bullet j}$	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	…	$n_{\bullet k}$	**N**

I. Tableau de contingence

- Le nombre n_{ik} est l'effectif concernant à la fois les modalités x_i et y_j, c'est-à-dire la modalité du couple (x_i , y_j), où $i = 1,\ldots,m$ et $j = 1,\ldots,k$.

- $n_{i\bullet} = \sum_{p=1}^{k} n_{ip}$ correspond au nombre d'individus ayant les modalités x_i où $i = 1,\ldots,m$.

- $n_{\bullet j} = \sum_{p=1}^{m} n_{pj}$ correspond au nombre d'individus ayant les modalités y_j où $j = 1,\ldots,k$.

- $N = \sum_{j=1}^{k} n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{n} n_{kj} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} n_{ik}$ correspond à l'effectif total.

I. Tableau de contingence

Soient X et Y deux variables statistiques qui désignent respectivement le poids (Kg) et la taille (Cm) de 100 animaux.

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	2	4	2	5	1	14
[5,10[	4	5	5	2	2	18
[10,15[	2	10	5	15	4	36
[15,20[	4	4	2	1	1	12
[20,25[	5	2	1	10	2	20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	17	25	15	33	10	N = 100

I. Tableau de contingence

- Fréquence partielle du couple (x_i , y_j) où $i = 1,\ldots,m$ et $j = 1,\ldots,k$. est donnée par :

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

- Fréquence marginale de x_i où $i = 1,\ldots,m$ est donnée par:

$$f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}$$

- Fréquence marginale de y_j $j = 1,\ldots,k$ est donnée par:

$$f_{\bullet j} = \frac{n_{j\bullet}}{n}$$

II. Tableau de fréquences

X\Y	y_1	y_2	…	y_k	Marge de X $f_{i\bullet}$
x_1	f_{11}	f_{12}	…	f_{1k}	$f_{1\bullet}$
x_2	f_{21}	f_{22}	…	f_{2k}	$f_{2\bullet}$
…	…	…	…	…	
x_m	f_{m1}	f_{m2}	…	f_{mk}	$f_{m\bullet}$
Marge de Y $f_{\bullet j}$	$f_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 2}$	…	$f_{\bullet k}$	1

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \qquad f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n} \qquad f_{\bullet j} = \frac{n_{j\bullet}}{n}$$

II. Tableau de fréquences

Exemple :

Le tableau de fréquence du couple (x_i,y_j) et des fréquences marginales est :

X\Y	P	AB	B	TB	Fréquence Marginale de X
3	0,2	0,1	0,1	0,05	0,45
4	0,15	0,1	0,05	0,05	0,35
5	0,1	0,05	0,05	0	0,2
Fréquence Marginale de Y	0,45	0,25	0,2	0,1	**1**

II. Tableau de fréquences

Le tableau de fréquence du couple (x_i,y_j) et des fréquences marginales est :

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	0,02	0,04	0,02	0,05	0,01	0,14
[5,10[	0,04	0,05	0,05	0,02	0,02	0,18
[10,15[	0,02	0,10	0,05	0,15	0,04	0,36
[15,20[	0,04	0,04	0,02	0,01	0,01	0,12
[20,25[	0,05	0,02	0,01	0,10	0,2	0,20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	0,17	0,25	0,15	0,33	0,10	N = 1

III. Moyennes et Variances Marginales

Soient $\{x_i : 1 \le i \le m\}$ et $\{y_j : 1 \le j \le k\}$ les valeurs discrètes ou les centres de classe pour les variables continues. Alors les moyennes et variances marginales sont:

Variable X	Variable Y
Moyenne marginale de X $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_{i\bullet} x_i = \sum_{i=1}^{m} f_{i\bullet} x_i$	Moyenne marginale de Y $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_{\bullet j} y_j = \sum_{j=1}^{k} f_{\bullet j} y_j$
Variance marginale de X $\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{x}^2$	Variance marginale de Y $\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_{\bullet j} y_j^2 - \bar{y}^2$

III. Moyennes et Variances Marginales

Soit l'exemple suivant :

X \ Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	2	4	2	5	1	14
[5,10[	4	5	5	2	2	18
[10,15[	2	10	5	15	4	36
[15,20[	4	4	2	1	1	12
[20,25[	5	2	1	10	2	20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	17	25	15	33	10	N = 100

Distribution marginale de X

x_i	$n_{i\bullet}$	$n_{\bullet i}x_i$	$n_{i\bullet}x_i^2$
2,5	14	35	87,5
7,5	18	135	1012,5
12,5	36	450	5625
17,5	12	210	3675
22,5	20	450	10125
Total	**100**	**1280**	**20525**

III. Moyennes et Variances Marginales

Calcul de la moyenne marginale et la variance marginale de X

x_i	$n_{i\bullet}$	$n_{\bullet i}x_i$	$n_{i\bullet}x_i^2$
2,5	14	35	87,5
7,5	18	135	1012,5
12,5	36	450	5625
17,5	12	210	3675
22,5	20	450	10125
Total	**100**	**1280**	**20525**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_{i\bullet}x_i = \frac{1}{100}\times 1280 = 12.8$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_{i\bullet}x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100}\times 20525 - (12.8)^2 = 205.25 - 163.84 = 41.41$$

IV. Distributions Conditionnelles

La distribution conditionnelle est la distribution d'une variables sachant que l'autre a une valeur fixe. On écrit $X/Y = y_j$ (X sachant $Y = y_j$) ou $Y/X = x_i$ (Y sachant $X = x_i$)

Il existe deux types de distributions:

- Distribution conditionnelle de Y sachant $X = x_i$
- Distribution conditionnelle de X sachant $Y = y_j$.

IV. Distributions Conditionnelles

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	2	4	2	5	1	14
[5,10[	4	5	5	2	2	18
[10,15[	2	10	5	15	4	36
[15,20[	4	4	2	1	1	12
[20,25[	5	2	1	10	2	20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	17	25	15	33	10	N = 100

Soient:

- ❑ X une variable qui varie en parcourant toutes les classes
- ❑ Y est une variable qui fait parti à l'intervalle [0, 5[

La distribution conditionnelle de X sachant que $Y \in [0,5[$ et les fréquences conditionnelles obtenues par les effectifs $n_{i1}\,(i=1,...,5)$ divisés par $n_{\bullet 1}$

IV. Distributions Conditionnelles

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	2	4	2	5	1	14
[5,10[	4	5	5	2	2	18
[10,15[	2	10	5	15	4	36
[15,20[	4	4	2	1	1	12
[20,25[	5	2	1	10	2	20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	17	25	15	33	10	N = 100

X\Y	L'effectif conditionnel de $X / Y \in [0,5[$	Fréquence conditionnelle de $X / Y \in [0,5[$
[0,5[	2	0,12
[5,10[	4	0,23
[10,15[	2	0,12
[15,20[	4	0,23
[20,25[	5	0,3
$n_{\bullet 1}$	17	1

IV. Distributions Conditionnelles

La distribution conditionnelle de Y sachant que $X \in [10,15[$ et les fréquences conditionnelles obtenues par les effectifs $n_{3j}\ (j = 1,\ldots,5)$ divisés par $n_{3\bullet}$

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	**2**	4	2	5	1	14
[5,10[	**4**	5	5	2	2	18
[10,15[	**2**	10	5	15	4	36
[15,20[	**4**	4	2	1	1	12
[20,25[	**5**	2	1	10	2	20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	**17**	25	15	33	10	N = 100

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{3\bullet}$
L'effectif conditionnel de $Y/X \in [10,15[$	**2**	10	5	15	4	36
Fréquence conditionnelle de $Y/X \in [10,15[$	0.055	0.277	0.138	0.416	0.111	1

V. Moyennes et Variances Conditionnelles

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	Marge de X $n_{i\bullet}$
[0,5[	2	4	2	5	1	14
[5,10[	4	5	5	2	2	18
[10,15[	2	10	5	15	4	36
[15,20[	4	4	2	1	1	12
[20,25[	5	2	1	10	2	20
Marge de Y $n_{\bullet j}$	17	25	15	33	10	**N = 100**

La distribution conditionnelle de X sachant [10,15[est une série univariée obtenue par l'élimination de toutes les classes sauf celle correspond à $n_{3\bullet}$

X\Y	$n_{3\bullet}$
[0,5[	2
[5,10[	5
[10,15[	5
[15,20[	2
[20,25[	1

V. Moyennes et Variances Conditionnelles

Calcul de la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle de X

X\Y	c_i	$n_{3\bullet}$	$c_i n_{3\bullet}$	$c_i^2 n_{3\bullet}$
[0,5[	2,5	2	5	12,5
[5,10[	7,5	5	37,5	281,25
[10,15[	12,5	5	62,5	781,25
[15,20[	17,5	2	35	612,5
[20,25[	22,5	1	22,5	506,25
Total		15	162,5	2193,75

$$\overline{x}_{/[10,15]} = \overline{x}_{/3} = \frac{1}{n_{\bullet 3}} \sum_{i=1}^{m} c_i n_{i3} = \frac{162.5}{15} = 10.83$$

$$\sigma^2_{/[10,15]} = \sigma^2_{/3} = \frac{1}{n_{\bullet 3}} \sum_{i=1}^{m} n_{ij} x_i^2 - \left(\overline{x}_{/3}\right)^2 = \frac{2193.75}{15} - \left(10.83\right)^2 = 34.7$$

V. Moyennes et Variances Conditionnelles

Variable X sachant $Y = y_j$	Variable Y sachant $X = x_j$
Moyenne conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ $\bar{x}_{/j} = \frac{1}{n_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{m} n_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} f_{i/j} x_i$	Moyenne conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ $\bar{y}_{/i} = \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{k} n_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{k} f_{j/i} y_j$
Variance conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ $\sigma^2_{X/j} = \frac{1}{n_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{m} n_{ij} \left(x_i - \bar{x}_{/j} \right)^2$	Variance conditionnelle de Y sachant $X = x_i$ $\sigma^2_{Y/i} = \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \left(y_j - \bar{y}_{/i} \right)^2$

VI. Covariance

La covariance de X et Y est la quantité

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} n_{ij}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_j - \bar{y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} x_i y_j - \bar{x}\times\bar{y}$$

$$= \overline{xy} - \bar{x}\times\bar{y}$$

Remarque:

Dans le cas des séries quantitatives non-groupées, on a $n_{ij} = 1$

VI. Covariance

Soient X et Y deux variables statistiques qui désignent respectivement le poids (Kg) et la taille (Cm) de 6 animaux.

Cas 1: Variables quantitatives non-groupées

	Poids (x_i)	**Taille (y_i)**	**$x_i\ y_i$**
1	12	10	120
2	14	11	154
3	15	13	195
4	6	7	42
5	9	11	99
6	7	5	35
Total	63	57	645

On a :

$$\bar{x} = \frac{63}{6} = 10.5 \qquad \text{et} \qquad \bar{y} = \frac{57}{6} = 9,5$$

$$Cov(X,Y) = \frac{645}{6} - (10.5 \times 9,5) = 7.75$$

Cas 2: Variables quantitatives groupées

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	x_i	$n_{i\bullet}$	$n_{i\bullet}x_i$	$n_{i\bullet}x_i^2$
[0,5[	2	4	2	5	1	**2,5**	**14**	35	87,5
[5,10[	4	5	5	2	2	**7,5**	**18**	135	1012,5
[10,15[	2	10	5	15	4	**12,5**	**36**	450	5625
[15,20[	4	4	2	1	1	**17,5**	**12**	210	3675
[20,25[	5	2	1	10	2	**22,5**	**20**	450	10125
y_j	**2,5**	**7,5**	**12,5**	**17,5**	**22,5**			**1280**	**20525**
$n_{\bullet j}$	**17**	**25**	**15**	**33**	**10**		**N = 100**		
$n_{\bullet j}y_j$	42,5	187,5	187,5	577,5	225	**1220**			
$n_{\bullet j}y_j^2$	106,25	1406,25	486,75	10106,25	5062,5	**17168**			

$$\overline{x} = \frac{1280}{100} = 12.8 \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{1220}{100} = 12.2$$

$$V(Y) = \frac{17168}{100} - (12.2)^2 = 7.84 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{20525}{100} - (12.8)^2 = 56.41$$

VI. Covariance

Calculons la somme suivante: $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k} n_{ij} y_j\right)\times x_i$. Pour chaque case on fixe i et on fait varier j.

Case N°1:

						Centre de X x_1
Effectif marginaux n_{1j} de [0,5[	2	4	2	5	1	**2,5**
Centre de Y y_j	**2,5**	**7,5**	**12,5**	**17,5**	**22,5**	

$$\left(n_{11}y_1+n_{12}y_2+n_{13}y_3+n_{14}y_4+n_{15}y_5\right)\times x_1=\left(2\times 2.5+4\times 7.5+2\times 12.5+5\times 17.5+1\times 22.5\right)\times 2.5=425$$

Case N°2:

						Centre de X x_2
Effectif marginaux n_{2j} de [5,10[	4	5	5	2	2	**7,5**
Centre de Y y_j	**2,5**	**7,5**	**12,5**	**17,5**	**22,5**	

$$\left(n_{11}y_1+n_{12}y_2+n_{13}y_3+n_{14}y_4+n_{15}y_5\right)\times x_1=\left(4\times 2.5+5\times 7.5+5\times 12.5+2\times 17.5+2\times 22.5\right)\times 7.5=1425$$

VI. Covariance

Case N°3:

						Centre de X x_3
Effectif marginaux n_{3j} de [10,15[	2	10	5	15	4	12,5
Centre de Y y_j	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	

$$\left(n_{11}y_1+n_{12}y_2+n_{13}y_3+n_{14}y_4+n_{15}y_5\right)\times x_1=\left(2\times 2.5+10\times 7.5+5\times 12.5+15\times 17.5+4\times 22.5\right)\times 12.5=6187.5$$

Case N°4:

						Centre de X x_4
Effectif marginaux n_{4j} de [15,20[	4	4	2	1	1	17,5
Centre de Y y_j	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	

$$\left(n_{11}y_1+n_{12}y_2+n_{13}y_3+n_{14}y_4+n_{15}y_5\right)\times x_1=\left(4\times 2.5+4\times 7.5+2\times 12.5+1\times 17.5+1\times 22.5\right)\times 17.5=1837.5$$

VI. Covariance

Case N°5:

						Centre de X x_5
Effectif marginaux n_{5j} **de [15,20[**	5	2	1	10	2	**22,5**
Centre de Y y_j	**2,5**	**7,5**	**12,5**	**17,5**	**22,5**	

$$\left(n_{11}y_1+n_{12}y_2+n_{13}y_3+n_{14}y_4+n_{15}y_5\right)\times x_1=\left(5\times 2.5+2\times 7.5+1\times 12.5+10\times 17.5+2\times 22.5\right)\times 22.5=5850$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}n_{ij}x_i y_j-\bar{x}\times\bar{y}$$

$$=\frac{1}{100}\left(425+1425+6187.5+1837.5+5850\right)-12.2\times 12.8$$

$$=157.25-156.16=1.09$$

V. Corrélation

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est donnée par:

$$R = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

R^2 désigne le coefficient de détermination de X et Y

Remarques importante :

- On a toujours $-1 \leq R \leq 1 \Rightarrow 0 \leq R^2 \leq 1$.
- La covariance dépend des unités ce qui est difficile à interpréter .
- La corrélation ne dépend pas des unités.

V. Corrélation

$$\bar{x} = \frac{1280}{100} = 12.8 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1220}{100} = 12.2$$

$$V(X) = \frac{17168}{100} - (12.8)^2 = 7.84 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{20525}{100} - (12.2)^2 = 56.41$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7.84} = 2.8 \quad \text{et} \quad \sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{56.41} = 7.51$$

$$Cov(X,Y) = 1.09$$

$$R = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1.09}{2.8 \times 7.51} = 0.051$$

VI. Régression linéaire

Soient X et Y deux variables statistiques dont les valeurs sont:

- $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $y_1, y_2, \ldots, y_k$

Considérons la série statistique constituée de n couples des valeurs prises par les deux variables pour chaque individu : $(x_1, y_1), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_n, y_n)$

L'objectif de la régression linéaire est d'étudier la relation qui peut exister entre X et Y en cherchant la fonction f telle que: $Y = f(X)$

VI. Régression linéaire

L'ensemble des poids (x_i , y_i) qui constituent « un nuage de poids » sont représentés dans un repère orthogonal, ce qui nous permet d'avoir une idée claire sur la nature de la relation entre X et Y et le type de courbe qui ajustera le mieux.

L'ajustement linéaire se base sur le choix de la droite qui passe le plus proche de tous les points du nuage. Cette droite est appelée droite de régression linéaire de Y en X, noté $D_{Y/X}$, et son équation est donnée par: $y = a + bx$

où a et b représentent les paramètres de cette droite.

VI. Régression linéaire

La déterminer de l'équation de la droite de régression linéaire se base sur l'utilisation de la méthode des moindres carrés (M.M.C) qui consiste à minimiser la somme des carrés des distances entre les points du nuage et cette droite.

C'est-à-dire:

$$Minimiser\left\{(E)=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\right\}$$

Les paramètres a et b qui minimisent l'équation (E) sont donnés par :

$$b=\frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} \qquad \text{et} \qquad a=\bar{y}-b\bar{x}$$

Coefficient de corrélation linéaire

Ce coefficient mesure le degré de liaison entre X et Y. Il est donné par:

$$r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

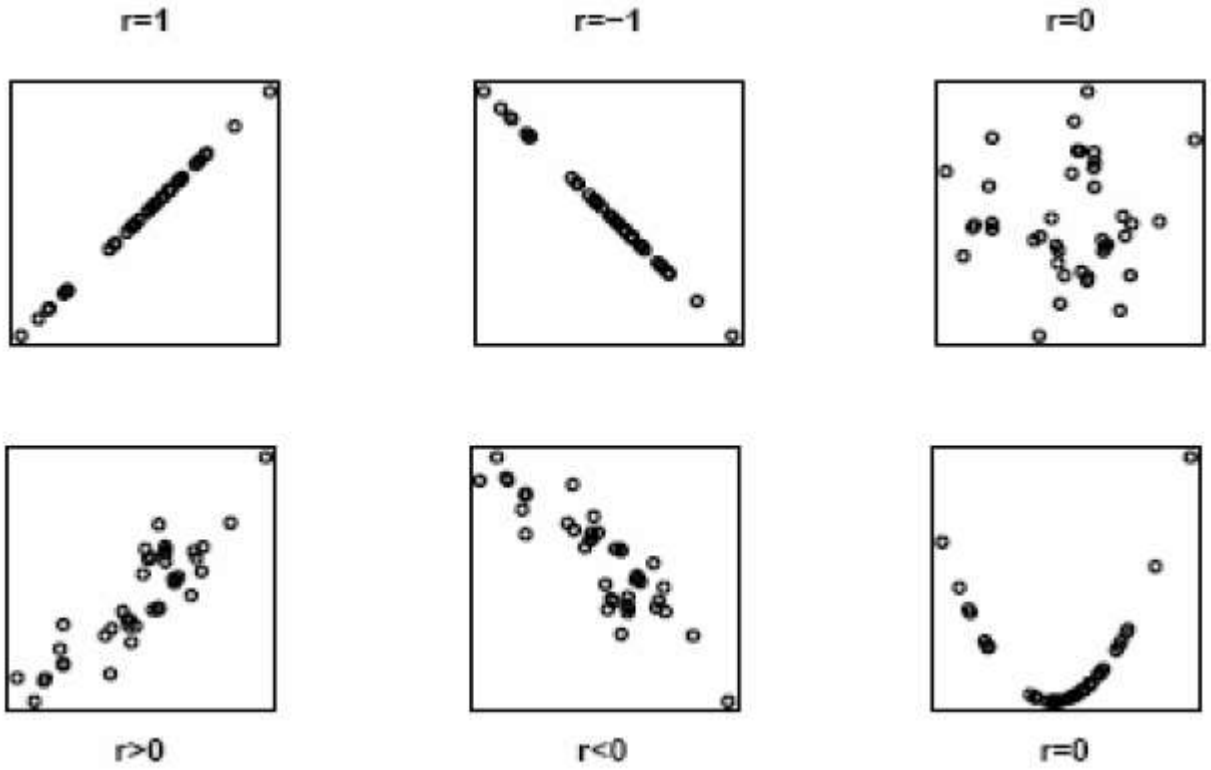
$r^2(X,Y)$ désigne le coefficient de détermination

On a: $-1 \leq r \leq +1$

- Si $r < 0$ alors la liaison est négative.
- Si $r > 0$ alors la liaison est positive.
- Si $r = 0$ alors la liaison est nulle.

VI. Régression linéaire

- Pus la valeur absolue de ***r*** est proche de ***1 plus*** la liaison entre X et Y est forte.
- Pus la valeur absolue de ***r*** est proche de ***0*** plus la liaison entre X et Y est faible



VI. Régression linéaire

Exemple 1:

	Poids (x_i)	x_i^2	Taille (y_i)	y_i^2	$x_i\, y_i$
1	12	144	10	100	120
2	14	196	11	121	154
3	15	225	13	169	195
4	6	36	7	49	42
5	9	81	11	121	99
6	7	49	5	25	35
Total	63	731	57	585	645

$$b = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{9,25}{7.25} = 1.27$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 9.5 - 1.27 \times 10.5$$
$$= -3.835$$

Donc $y = -3.835 + 1.27x$

On a : $\bar{x} = \frac{63}{6} = 10.5$, $\bar{y} = \frac{57}{6} = 9,5$ et $Cov(X,Y) = \frac{645}{6} - (10.5 \times 9,5) = 7.75$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{731}{6} - (10.5)^2 = 11.58 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2 = \frac{585}{6} - (9.5)^2 = 7.25$$

VI. Régression linéaire

Exemple 2:

X\Y	[0,5[	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	x_i	$n_{i\bullet}$	$n_{i\bullet}x_i$	$n_{i\bullet}x_i^2$
[0,5[	2	4	2	5	1	**2,5**	**14**	35	87,5
[5,10[	4	5	5	2	2	**7,5**	**18**	135	1012,5
[10,15[	2	10	5	15	4	**12,5**	**36**	450	5625
[15,20[	4	4	2	1	1	**17,5**	**12**	210	3675
[20,25[	5	2	1	10	2	**22,5**	**20**	450	10125
y_j	**2,5**	**7,5**	**12,5**	**17,5**	**22,5**			**1280**	**20525**
$n_{\bullet j}$	**17**	**25**	**15**	**33**	**10**		**N = 100**		
$n_{\bullet j}y_j$	42,5	187,5	187,5	577,5	225	**1220**			
$n_{\bullet j}y_j^2$	106,25	1406,25	486,75	10106,25	5062,5	**17168**			

$$\bar{x} = \frac{1280}{100} = 12.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{1220}{100} = 12.2 \quad , \quad V(Y) = \frac{17168}{100} - (12.2)^2 = 7.84 \quad \text{et} \quad Cov(X,Y) = 1.09$$

$$b = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{1,09}{7.84} = 0.14 \quad , \quad a = \bar{y} - b\bar{x} = 12.2 - 0.14 \times 12.8 = 1.79 \quad \text{Donc} \quad y = 1.79 + 0.14x$$